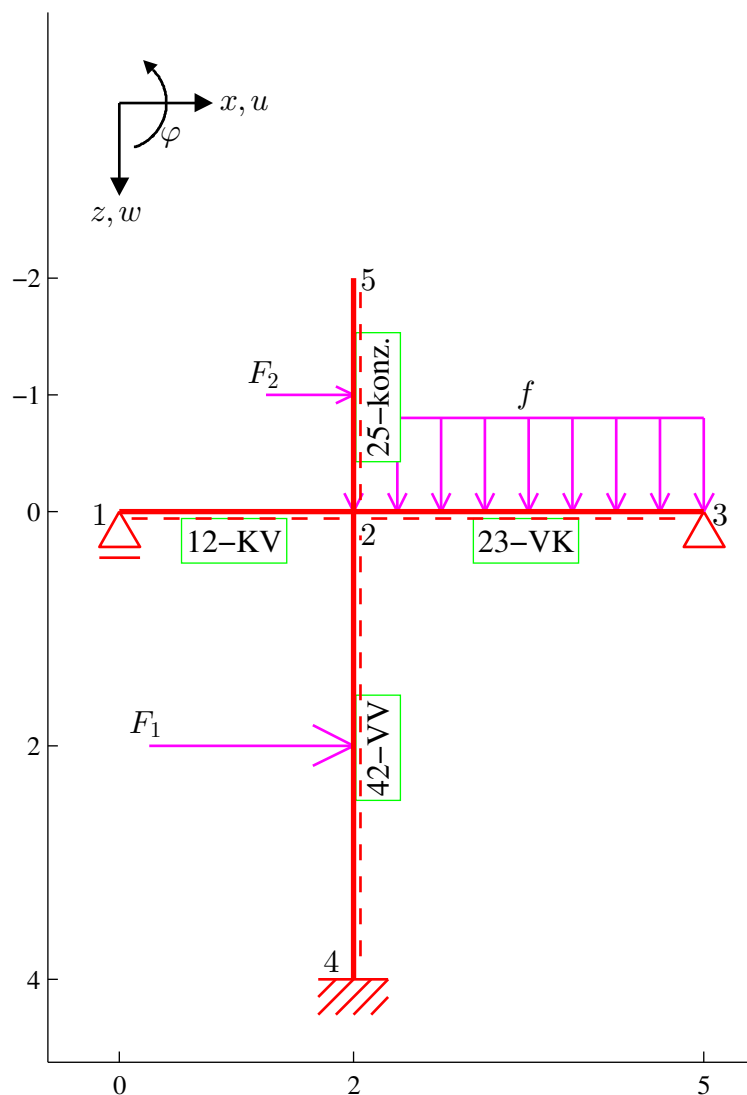


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil ( $M, V, N$ ) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je  $E = 30 \text{ GPa}$ . Konstrukce je zatížena silou  $F_1 = 7 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 3 \text{ kN}$  a rovnoměrným spojitým zatížením  $f = 10 \text{ kN/m}$ . (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

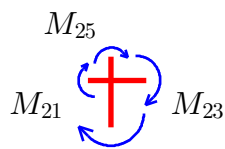
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = u_3 = 0 \\ w_5 &= w_2 = w_4 = 0 \end{aligned}$$

Za základní neznámou tedy zvolíme  $\varphi_2$ .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy



$$M_{21} + M_{23} + M_{24} + M_{25} = 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-KV (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{12}^l &= 0 - \frac{3 k_{12} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\ &= 0 - 1.013 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ M_{12} &= 0 + 0 \\ Z_{21}^l &= 0 + \frac{3 k_{12} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\ &= 0 + 1.013 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ M_{21} &= 0 + \frac{3 k_{12} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4} \\ &= 0 + 2.025 \cdot 10^4 \varphi_2 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\ Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\ X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\ Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2 \end{aligned}$$

Prut 23-VK ( $k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 9000 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^l &= -\frac{5 L_{23} f_z}{8} - \frac{3 k_{23} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\
&= -\frac{75}{4} - 4500 \varphi_2 \\
M_{23} &= \frac{L_{23}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4} \\
&= \frac{45}{4} + 1.35 \cdot 10^4 \varphi_2 \\
Z_{32}^l &= -\frac{3 L_{23} f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\
&= -\frac{45}{4} + 4500 \varphi_2 \\
M_{32} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\
Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3
\end{aligned}$$

Prut 42-VV ( $k_{42} = 2E_{42}I_{42}/L_{42} = 6750 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{42}^l &= \frac{b_{42} F_{1z} \left( \frac{a_{42} (a_{42} - b_{42})}{L_{42}^2} - 1 \right)}{L_{42}} - \frac{k_{42} \left( 3 \varphi_4 + 3 \varphi_2 - \frac{6 w_4^l - 6 w_2^l}{L_{42}} \right)}{L_{42}} \\
&= -\frac{7}{2} - 5063 \varphi_2 \\
M_{42} &= \frac{a_{42} b_{42}^2 F_{1z}}{L_{42}^2} + k_{42} \left( 2 \varphi_4 + \varphi_2 - \frac{3 w_4^l - 3 w_2^l}{L_{42}} \right) \\
&= \frac{7}{2} + 6750 \varphi_2 \\
Z_{24}^l &= -\frac{a_{42} F_{1z} \left( \frac{b_{42} (a_{42} - b_{42})}{L_{42}^2} + 1 \right)}{L_{42}} + \frac{k_{42} \left( 3 \varphi_4 + 3 \varphi_2 - \frac{6 w_4^l - 6 w_2^l}{L_{42}} \right)}{L_{42}} \\
&= -\frac{7}{2} + 5063 \varphi_2 \\
M_{24} &= -\frac{a_{42}^2 b_{42} F_{1z}}{L_{42}^2} + k_{42} \left( \varphi_4 + 2 \varphi_2 - \frac{3 w_4^l - 3 w_2^l}{L_{42}} \right) \\
&= -\frac{7}{2} + 1.35 \cdot 10^4 \varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{42} &= Z_{42}^l & u_4^l &= -w_4 \\ Z_{42} &= -X_{42}^l & w_4^l &= u_4 \\ X_{24} &= Z_{24}^l & u_2^l &= -w_2 \\ Z_{24} &= -X_{24}^l & w_2^l &= u_2 \end{aligned}$$

Prut 25-konz. (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{25}^l &= -F_{2z} + 0 \\ &= -3 + 0 \\ M_{25} &= a_{25} F_{2z} + 0 \\ &= 3 + 0 \\ Z_{52}^l &= 0 + 0 \\ M_{52} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{25} &= Z_{25}^l & u_2^l &= -w_2 \\ Z_{25} &= -X_{25}^l & w_2^l &= u_2 \\ X_{52} &= Z_{52}^l & u_5^l &= -w_5 \\ Z_{52} &= -X_{52}^l & w_5^l &= u_5 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínky rovnováhy dostaneme rovnici:

$$4.725 \cdot 10^4 \varphi_2 + 10.75 = 0$$

Vyřešením rovnice o jedné neznámé obdržíme hodnotu deformace

$$\varphi_2 = -0.0002275 \text{ rad}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= 2.304 \text{ kN} \\ M_{12} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -2.304 \text{ kN} \\ M_{21} &= -4.607 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 7.652 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -17.726 \text{ kN} \\ M_{23} &= 8.179 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= -7.652 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -12.274 \text{ kN} \\ M_{32} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 42:

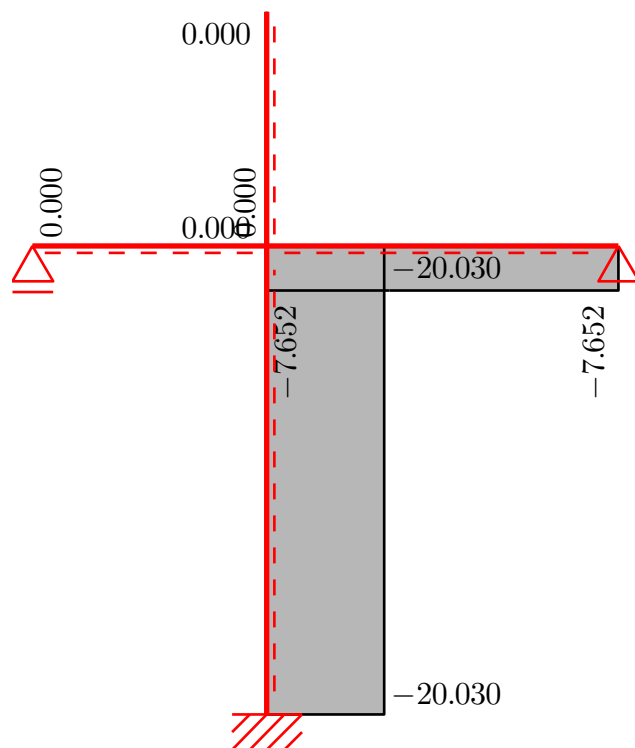
$$\begin{aligned} X_{42}^l &= 20.030 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= -2.348 \text{ kN} \\ M_{42} &= 1.964 \text{ kNm} \\ X_{24}^l &= -20.030 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= -4.652 \text{ kN} \\ M_{24} &= -6.571 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 25:

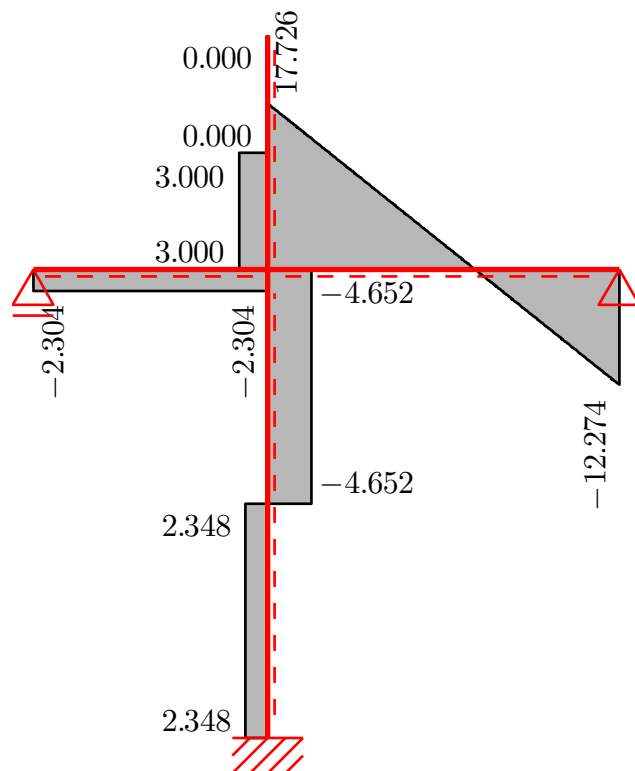
$$\begin{aligned} X_{25}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{25}^l &= -3.000 \text{ kN} \\ M_{25} &= 3.000 \text{ kNm} \\ X_{52}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{52}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ M_{52} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly  $N$  [kN]



- Posouvající síly  $V$  [kN]



- Ohybové momenty  $M$  [kNm]

