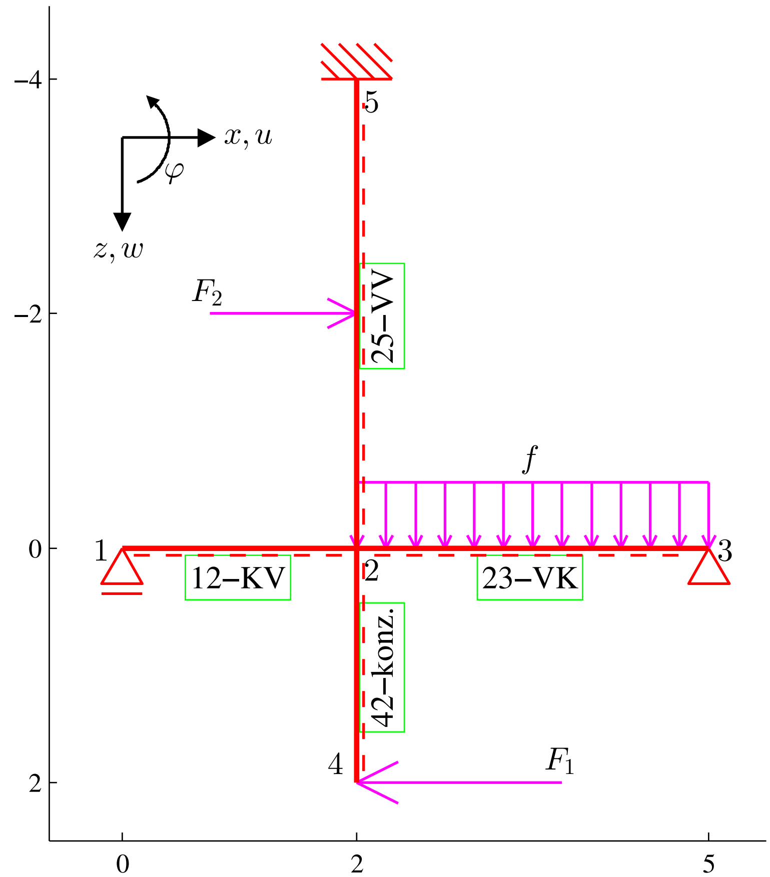
Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 25 x 40 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 35\,\mathrm{GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F_1 = 7\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 5\,\mathrm{kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 7\,\mathrm{kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



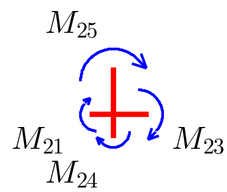
Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$
$$w_5 = w_2 = w_4 = 0$$

Za základní neznámou tedy zvolíme φ_2.
Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy



$$M_{21} + M_{23} + M_{24} + M_{25} = 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-KV (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z^l_{12} &= 0 - \frac{3\,k_{12}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_1 - 2\,w^l_2}{L_{12}}\right)}{4\,L_{12}} \\
&= 0 - 3.5 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{12} &= 0 + 0 \\
Z^l_{21} &= 0 + \frac{3\,k_{12}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_1 - 2\,w^l_2}{L_{12}}\right)}{4\,L_{12}} \\
&= 0 + 3.5 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{21} &= 0 + \frac{3\,k_{12}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_1 - 2\,w^l_2}{L_{12}}\right)}{4} \\
&= 0 + 7 \cdot 10^4\,\varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X^l_{12} & u^l_1 &= u_1 \\
Z_{12} &= Z^l_{12} & w^l_1 &= w_1 \\
X_{21} &= X^l_{21} & u^l_2 &= u_2 \\
Z_{21} &= Z^l_{21} & w^l_2 &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VK ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 3.111 \cdot 10^4\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z^l_{23} &= -\frac{5\,L_{23}\,f_z}{8} - \frac{3\,k_{23}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2 - 2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\
&= -\frac{105}{8} - 1.556 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{23} &= \frac{{L_{23}}^2\,f_z}{8} + \frac{3\,k_{23}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2 - 2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4} \\
&= \frac{63}{8} + 4.667 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
Z^l_{32} &= -\frac{3\,L_{23}\,f_z}{8} + \frac{3\,k_{23}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2 - 2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\
&= -\frac{63}{8} + 1.556 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{32} &= 0 + 0
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{aligned}
X_{23} &= X^l_{23} & u^l_2 &= u_2 \\
Z_{23} &= Z^l_{23} & w^l_2 &= w_2 \\
X_{32} &= X^l_{32} & u^l_3 &= u_3 \\
Z_{32} &= Z^l_{32} & w^l_3 &= w_3
\end{aligned}
$$

Prut 42-konz. (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z^l_{42} &= 0 + 0 \\
M_{42} &= 0 + 0 \\
Z^l_{24} &= -F_{1z} + 0 \\
&= 7 + 0 \\
M_{24} &= -b_{42}\,F_{1z} + 0 \\
&= 14 + 0
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{aligned}
X_{42} &= Z^l_{42} & u^l_4 &= -w_4 \\
Z_{42} &= -X^l_{42} & w^l_4 &= u_4 \\
X_{24} &= Z^l_{24} & u^l_2 &= -w_2 \\
Z_{24} &= -X^l_{24} & w^l_2 &= u_2
\end{aligned}
$$

Prut 25-VV ($k_{25} = 2E_{25}I_{25}/L_{25} = 2.333 \cdot 10^4\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z_{25}^l &= \frac{b_{25}\,F_{2z}\,\left(\frac{a_{25}\,(a_{25}-b_{25})}{{L_{25}}^2}-1\right)}{L_{25}} - \frac{k_{25}\,\left(3\,\varphi_2+3\,\varphi_5-\frac{6\,w_2^l-6\,w_5^l}{L_{25}}\right)}{L_{25}} \\
&= -\frac{5}{2} - 1.75\cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{25} &= \frac{a_{25}\,{b_{25}}^2\,F_{2z}}{{L_{25}}^2} + k_{25}\,\left(2\,\varphi_2+\varphi_5-\frac{3\,w_2^l-3\,w_5^l}{L_{25}}\right) \\
&= \frac{5}{2} + 4.667\cdot 10^4\,\varphi_2 \\
Z_{52}^l &= -\frac{a_{25}\,F_{2z}\,\left(\frac{b_{25}\,(a_{25}-b_{25})}{{L_{25}}^2}+1\right)}{L_{25}} + \frac{k_{25}\,\left(3\,\varphi_2+3\,\varphi_5-\frac{6\,w_2^l-6\,w_5^l}{L_{25}}\right)}{L_{25}} \\
&= -\frac{5}{2} + 1.75\cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{52} &= -\frac{{a_{25}}^2\,b_{25}\,F_{2z}}{{L_{25}}^2} + k_{25}\,\left(\varphi_2+2\,\varphi_5-\frac{3\,w_2^l-3\,w_5^l}{L_{25}}\right) \\
&= -\frac{5}{2} + 2.333\cdot 10^4\,\varphi_2
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{aligned}
X_{25} &= Z_{25}^l & u_2^l &= -w_2 \\
Z_{25} &= -X_{25}^l & w_2^l &= u_2 \\
X_{52} &= Z_{52}^l & u_5^l &= -w_5 \\
Z_{52} &= -X_{52}^l & w_5^l &= u_5
\end{aligned}
$$

Po dosazení koncových sil do podmínky rovnováhy dostaneme rovnici:

$$1.633\cdot 10^5\,\varphi_2 + 24.38 = 0$$

Vyřešením rovnice o jedné neznámé obdržíme hodnotu deformace

$$\varphi_2 = -0.0001492\,\mathrm{rad}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnících.

Prut 12:

$$X_{12}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{12}^l = 5.223\,\mathrm{kN}$$
$$M_{12} = 0.000\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{21}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{21}^l = -5.223\,\mathrm{kN}$$
$$M_{21} = -10.446\,\mathrm{kNm}$$

Prut 23:

$$X_{23}^l = -7.112\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{23}^l = -10.804\,\mathrm{kN}$$
$$M_{23} = 0.911\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{32}^l = 7.112\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{32}^l = -10.196\,\mathrm{kN}$$
$$M_{32} = 0.000\,\mathrm{kNm}$$

Prut 42:

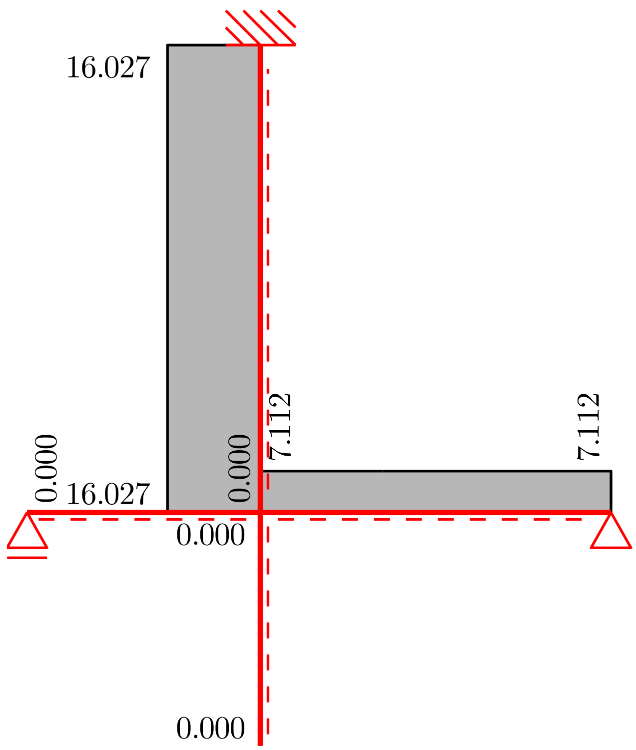
$$X_{42}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{42}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$M_{42} = 0.000\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{24}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{24}^l = 7.000\,\mathrm{kN}$$
$$M_{24} = 14.000\,\mathrm{kNm}$$

Prut 25:

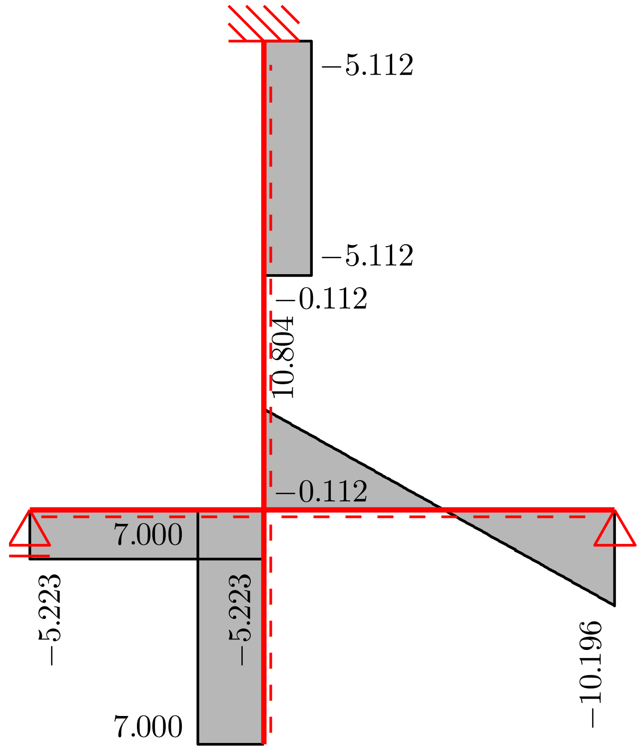
$$X_{25}^l = -16.027\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{25}^l = 0.112\,\mathrm{kN}$$
$$M_{25} = -4.464\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{52}^l = 16.027\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{52}^l = -5.112\,\mathrm{kN}$$
$$M_{52} = -5.982\,\mathrm{kNm}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]