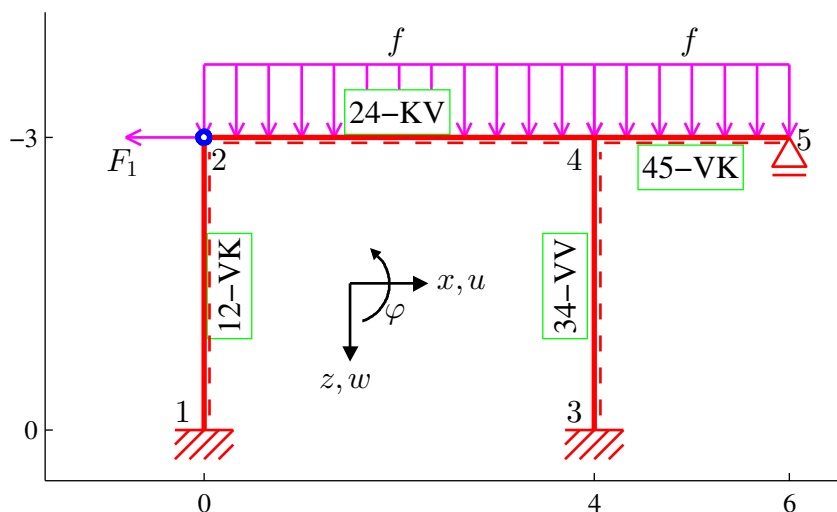


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 35 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 35 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F_1 = 20 \text{ kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 15 \text{ kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_2 = u_4 = u_5$$

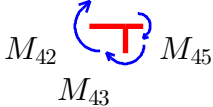
$$w_2 = w_1 = 0$$

$$w_4 = w_3 = 0$$

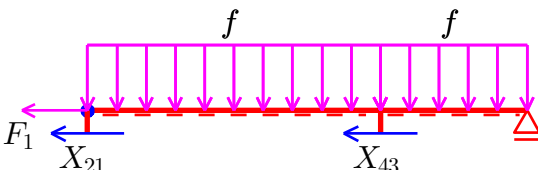
Za základní neznámé tedy zvolíme φ_4, u_2 .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{43} + M_{42} + M_{45} = 0$$


- Patrová podmínka rovnováhy

$$X_{21} + X_{43} = 0 + 0 - 20$$


Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VK ($k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 1.667 \cdot 10^4$ kNm):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{12}^l &= 0 - \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
 &= 0 - 2779 w_2^l \\
 M_{12} &= 0 + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4} \\
 &= 0 + 8337 w_2^l \\
 Z_{21}^l &= 0 + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
 &= 0 + 2779 w_2^l \\
 M_{21} &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{12} &= Z_{12}^l & u_1^l &= -w_1 \\
 Z_{12} &= -X_{12}^l & w_1^l &= u_1 \\
 X_{21} &= Z_{21}^l & u_2^l &= -w_2 \\
 Z_{21} &= -X_{21}^l & w_2^l &= u_2
 \end{aligned}$$

Prut 34-VV ($k_{34} = 2E_{34}I_{34}/L_{34} = 1.667 \cdot 10^4$ kNm):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{34}^l &= 0 - \frac{k_{34} \left(3 \varphi_3 + 3 \varphi_4 - \frac{6 w_3^l - 6 w_4^l}{L_{34}} \right)}{L_{34}} \\
 &= 0 - 1.667 \cdot 10^4 \varphi_4 - 1.112 \cdot 10^4 w_4^l \\
 M_{34} &= 0 + k_{34} \left(2 \varphi_3 + \varphi_4 - \frac{3 w_3^l - 3 w_4^l}{L_{34}} \right) \\
 &= 0 + 1.667 \cdot 10^4 \varphi_4 + 1.667 \cdot 10^4 w_4^l \\
 Z_{43}^l &= 0 + \frac{k_{34} \left(3 \varphi_3 + 3 \varphi_4 - \frac{6 w_3^l - 6 w_4^l}{L_{34}} \right)}{L_{34}} \\
 &= 0 + 1.667 \cdot 10^4 \varphi_4 + 1.112 \cdot 10^4 w_4^l \\
 M_{43} &= 0 + k_{34} \left(\varphi_3 + 2 \varphi_4 - \frac{3 w_3^l - 3 w_4^l}{L_{34}} \right) \\
 &= 0 + 3.335 \cdot 10^4 \varphi_4 + 1.667 \cdot 10^4 w_4^l
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{34} &= Z_{34}^l & u_3^l &= -w_3 \\
Z_{34} &= -X_{34}^l & w_3^l &= u_3 \\
X_{43} &= Z_{43}^l & u_4^l &= -w_4 \\
Z_{43} &= -X_{43}^l & w_4^l &= u_4
\end{aligned}$$

Prut 24-KV ($k_{24} = 2E_{24}I_{24}/L_{24} = 1.251 \cdot 10^4 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{24}^l &= -\frac{3 L_{24} f_z}{8} - \frac{3 k_{24} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4 L_{24}} \\
&= -\frac{45}{2} - 4689 \varphi_4 \\
M_{24} &= 0 + 0 \\
Z_{42}^l &= -\frac{5 L_{24} f_z}{8} + \frac{3 k_{24} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4 L_{24}} \\
&= -\frac{75}{2} + 4689 \varphi_4 \\
M_{42} &= -\frac{L_{24}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{24} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4} \\
&= -30 + 1.876 \cdot 10^4 \varphi_4
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{24} &= X_{24}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{24} &= Z_{24}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{42} &= X_{42}^l & u_4^l &= u_4 \\
Z_{42} &= Z_{42}^l & w_4^l &= w_4
\end{aligned}$$

Prut 45-VK (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{45}^l &= -\frac{5 L_{45} f_z}{8} - \frac{3 k_{45} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_4^l - 2 w_5^l}{L_{45}} \right)}{4 L_{45}} \\
&= -\frac{75}{4} - 1.876 \cdot 10^4 \varphi_4 \\
M_{45} &= \frac{L_{45}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{45} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_4^l - 2 w_5^l}{L_{45}} \right)}{4} \\
&= \frac{15}{2} + 3.752 \cdot 10^4 \varphi_4 \\
Z_{54}^l &= -\frac{3 L_{45} f_z}{8} + \frac{3 k_{45} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_4^l - 2 w_5^l}{L_{45}} \right)}{4 L_{45}} \\
&= -\frac{45}{4} + 1.876 \cdot 10^4 \varphi_4 \\
M_{54} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{45} &= X_{45}^l & u_4^l &= u_4 \\
Z_{45} &= Z_{45}^l & w_4^l &= w_4 \\
X_{54} &= X_{54}^l & u_5^l &= u_5 \\
Z_{54} &= Z_{54}^l & w_5^l &= w_5
\end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
8.962 \cdot 10^4 \varphi_4 + 1.667 \cdot 10^4 u_2 - 22.5 &= 0 \\
1.667 \cdot 10^4 \varphi_4 + 1.389 \cdot 10^4 u_2 + 20 &= 0
\end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned}
\varphi_4 &= 0.000668 \text{ rad} \\
u_2 &= -0.002241 \text{ m}
\end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 25.632 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= 6.228 \text{ kN} \\ M_{12} &= -18.683 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= -25.632 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -6.228 \text{ kN} \\ M_{21} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 34:

$$\begin{aligned} X_{34}^l &= 65.647 \text{ kN} \\ Z_{34}^l &= 13.772 \text{ kN} \\ M_{34} &= -26.228 \text{ kNm} \\ X_{43}^l &= -65.647 \text{ kN} \\ Z_{43}^l &= -13.772 \text{ kN} \\ M_{43} &= -15.090 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 24:

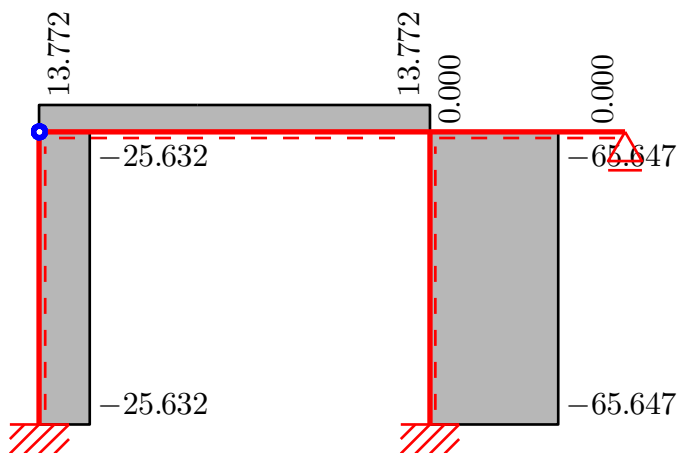
$$\begin{aligned} X_{24}^l &= -13.772 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= -25.632 \text{ kN} \\ M_{24} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{42}^l &= 13.772 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= -34.368 \text{ kN} \\ M_{42} &= -17.470 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

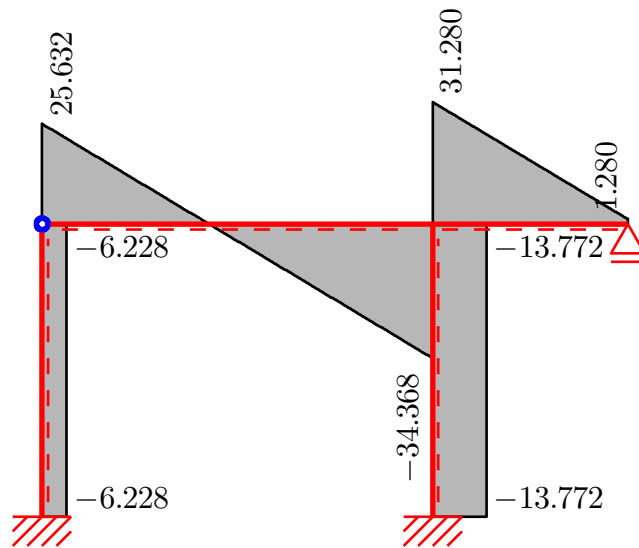
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= -31.280 \text{ kN} \\ M_{45} &= 32.560 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= 1.280 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

