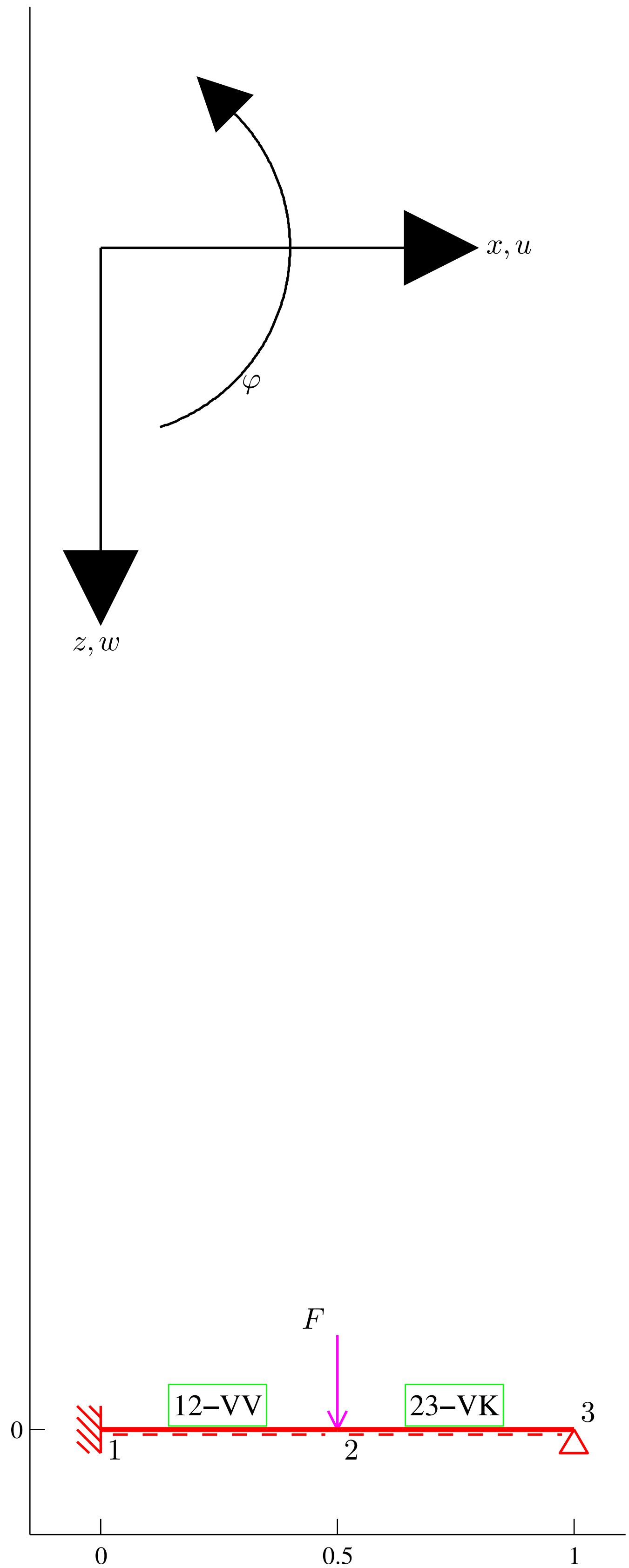
Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil $(M, V, N)$ na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 15 x 30 cm (šířka x výška). Prut "12" je vyroben z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 30\,\mathrm{GPa}$, prut "23" má modul pružnosti $E = 10\,\mathrm{GPa}$.Konstrukce je zatížena silou $F = 8\,\mathrm{kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 5\,\mathrm{kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)




Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

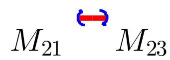
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

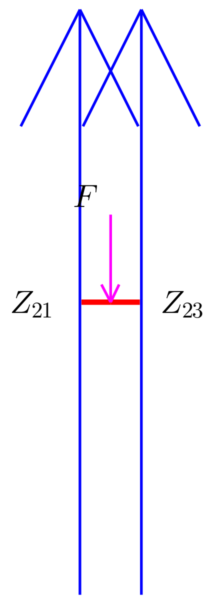
Za základní neznámé tedy zvolíme $\varphi_2$, $w_2$.
Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

  $M_{21} + M_{23} = 0$




- Sloupová podmínka rovnováhy




  $Z_{21} + Z_{23} = 1$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VV ($k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 1.35 \cdot 10^4\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^{l} &= 0 - \frac{k_{12}\left(3\,\varphi_1 + 3\,\varphi_2 - \frac{6\,w_1^l - 6\,w_2^l}{L_{12}}\right)}{L_{12}} \\
&= 0 - 8.1\cdot 10^4\,\varphi_2 - 3.24\cdot 10^5\,w_2^l \\
M_{12} &= 0 + k_{12}\left(2\,\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{3\,w_1^l - 3\,w_2^l}{L_{12}}\right) \\
&= 0 + 1.35\cdot 10^4\,\varphi_2 + 8.1\cdot 10^4\,w_2^l \\
Z_{21}^{l} &= 0 + \frac{k_{12}\left(3\,\varphi_1 + 3\,\varphi_2 - \frac{6\,w_1^l - 6\,w_2^l}{L_{12}}\right)}{L_{12}} \\
&= 0 + 8.1\cdot 10^4\,\varphi_2 + 3.24\cdot 10^5\,w_2^l \\
M_{21} &= 0 + k_{12}\left(\varphi_1 + 2\,\varphi_2 - \frac{3\,w_1^l - 3\,w_2^l}{L_{12}}\right) \\
&= 0 + 2.7\cdot 10^4\,\varphi_2 + 8.1\cdot 10^4\,w_2^l
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VK ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 1.35\cdot 10^4\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^{l} &= 0 - \frac{3\,k_{23}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w_2^l - 2\,w_3^l}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\
&= 0 + 8.1\cdot 10^4\,w_2^l - 4.05\cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{23} &= 0 + \frac{3\,k_{23}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w_2^l - 2\,w_3^l}{L_{23}}\right)}{4} \\
&= 0 + 2.025\cdot 10^4\,\varphi_2 - 4.05\cdot 10^4\,w_2^l \\
Z_{32}^{l} &= 0 + \frac{3\,k_{23}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w_2^l - 2\,w_3^l}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\
&= 0 + 4.05\cdot 10^4\,\varphi_2 - 8.1\cdot 10^4\,w_2^l \\
M_{32} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\
Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3
\end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
4.725 \cdot 10^4\, \varphi_2 + 4.05 \cdot 10^4\, w_2 = 0 \\
4.05 \cdot 10^4\, \varphi_2 + 4.05 \cdot 10^5\, w_2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčníkových přemístění)

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= -2.315 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad} \\
w_2 &= 2.701 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnících.

Prut 12:

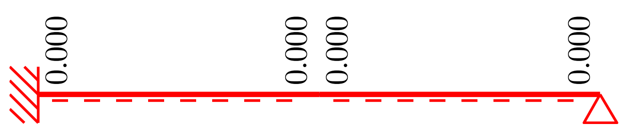
$$
\begin{aligned}
X^l_{12} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z^l_{12} &= -0.688\,\mathrm{kN} \\
M_{12} &= 0.188\,\mathrm{kNm} \\
X^l_{21} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z^l_{21} &= 0.688\,\mathrm{kN} \\
M_{21} &= 0.156\,\mathrm{kNm}
\end{aligned}
$$

Prut 23:

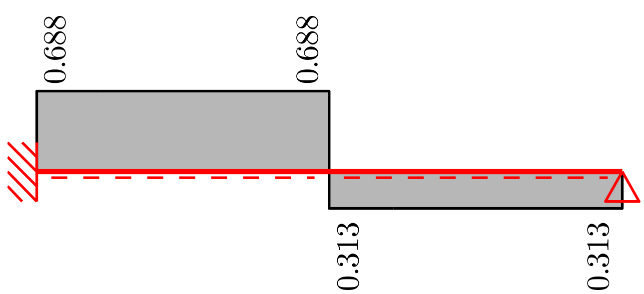
$$
\begin{aligned}
X^l_{23} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z^l_{23} &= 0.313\,\mathrm{kN} \\
M_{23} &= -0.156\,\mathrm{kNm} \\
X^l_{32} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z^l_{32} &= -0.313\,\mathrm{kN} \\
M_{32} &= 0.000\,\mathrm{kNm}
\end{aligned}
$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

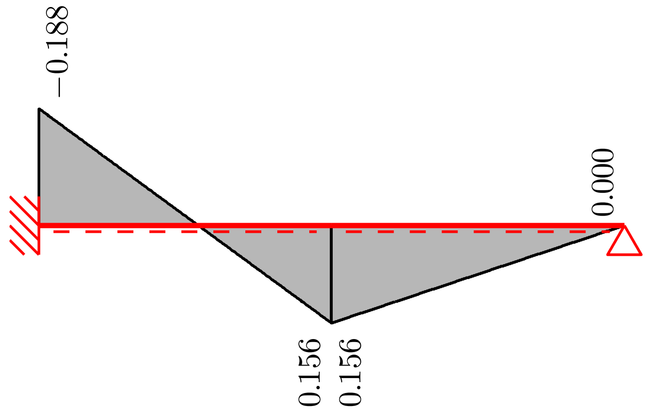
- Normálové síly $N$ [kN]




- Posouvající síly $V$ [kN]




- Ohybové momenty $M$ [kNm]


−0.188
0.000
0.156
0.156