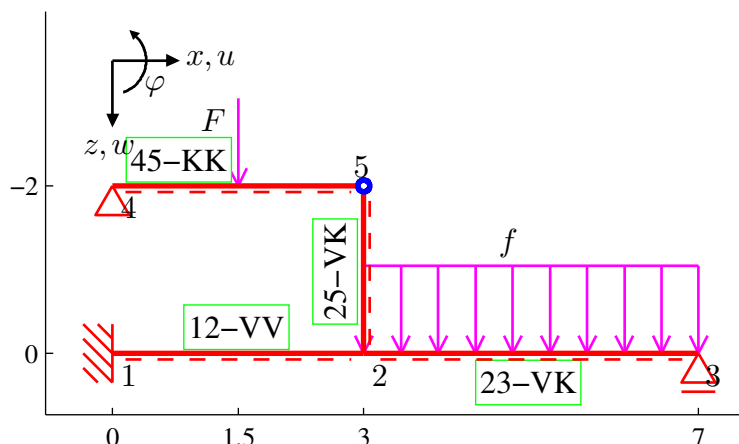


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají čtvercový průřez o rozměrech 40 x 40 cm a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 15 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F = 10 \text{ kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 5 \text{ kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

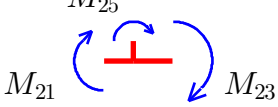
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$\begin{aligned} w_5 &= w_2 \\ u_4 &= u_5 = 0 \\ u_1 &= u_2 = u_3 = 0 \end{aligned}$$

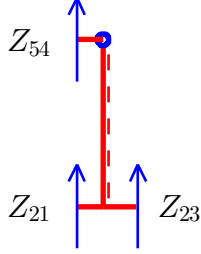
Za základní neznámé tedy zvolíme φ_2, w_5 .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$$


- Sloupová podmínka rovnováhy

$$Z_{54} + Z_{21} + Z_{23} = 0$$


Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VV ($k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 2.133 \cdot 10^4$ kNm):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{12}^l &= 0 - \frac{k_{12} \left(3\varphi_1 + 3\varphi_2 - \frac{6w_1^l - 6w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
 &= 0 - 2.133 \cdot 10^4 \varphi_2 - 1.422 \cdot 10^4 w_2^l \\
 M_{12} &= 0 + k_{12} \left(2\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{3w_1^l - 3w_2^l}{L_{12}} \right) \\
 &= 0 + 2.133 \cdot 10^4 \varphi_2 + 2.133 \cdot 10^4 w_2^l \\
 Z_{21}^l &= 0 + \frac{k_{12} \left(3\varphi_1 + 3\varphi_2 - \frac{6w_1^l - 6w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
 &= 0 + 2.133 \cdot 10^4 \varphi_2 + 1.422 \cdot 10^4 w_2^l \\
 M_{21} &= 0 + k_{12} \left(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{3w_1^l - 3w_2^l}{L_{12}} \right) \\
 &= 0 + 4.267 \cdot 10^4 \varphi_2 + 2.133 \cdot 10^4 w_2^l
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
 Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
 X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
 Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
 \end{aligned}$$

Prut 23-VK (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{23}^l &= -\frac{5L_{23}f_z}{8} - \frac{3k_{23} \left(2\varphi_2 - \frac{2w_2^l - 2w_3^l}{L_{23}} \right)}{4L_{23}} \\
 &= -\frac{25}{2} + 1500w_2^l - 6000\varphi_2 \\
 M_{23} &= \frac{L_{23}^2 f_z}{8} + \frac{3k_{23} \left(2\varphi_2 - \frac{2w_2^l - 2w_3^l}{L_{23}} \right)}{4} \\
 &= 10 + 2.4 \cdot 10^4 \varphi_2 - 6000w_2^l \\
 Z_{32}^l &= -\frac{3L_{23}f_z}{8} + \frac{3k_{23} \left(2\varphi_2 - \frac{2w_2^l - 2w_3^l}{L_{23}} \right)}{4L_{23}} \\
 &= -\frac{15}{2} + 6000\varphi_2 - 1500w_2^l \\
 M_{32} &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\ Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\ X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\ Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3 \end{aligned}$$

Prut 45-KK (z hlediska ohybu staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{45}^l &= -\frac{b_{45} F_z}{L_{45}} + 0 \\ &= -\frac{15}{2} + 0 \\ M_{45} &= 0 + 0 \\ Z_{54}^l &= -\frac{a_{45} F_z}{L_{45}} + 0 \\ &= -\frac{15}{2} + 0 \\ M_{54} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{45} &= X_{45}^l & u_4^l &= u_4 \\ Z_{45} &= Z_{45}^l & w_4^l &= w_4 \\ X_{54} &= X_{54}^l & u_5^l &= u_5 \\ Z_{54} &= Z_{54}^l & w_5^l &= w_5 \end{aligned}$$

Prut 25-VK ($k_{25} = 2E_{25}I_{25}/L_{25} = 3.2 \cdot 10^4 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{25}^l &= 0 - \frac{3 k_{25} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_5^l}{L_{25}} \right)}{4 L_{25}} \\ &= 0 - 2.4 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ M_{25} &= 0 + \frac{3 k_{25} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_5^l}{L_{25}} \right)}{4} \\ &= 0 + 4.8 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ Z_{52}^l &= 0 + \frac{3 k_{25} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_5^l}{L_{25}} \right)}{4 L_{25}} \\ &= 0 + 2.4 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ M_{52} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{25} &= Z_{25}^l & u_2^l &= -w_2 \\ Z_{25} &= -X_{25}^l & w_2^l &= u_2 \\ X_{52} &= Z_{52}^l & u_5^l &= -w_5 \\ Z_{52} &= -X_{52}^l & w_5^l &= u_5 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1.147 \cdot 10^5 \varphi_2 + 1.533 \cdot 10^4 w_5 + 10 &= 0 \\ 1.533 \cdot 10^4 \varphi_2 + 1.572 \cdot 10^4 w_5 - 20 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -0.0002959 \text{ rad} \\ w_5 &= 0.001561 \text{ m} \end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 7.102 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -15.884 \text{ kN} \\ M_{12} &= 26.982 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= -7.102 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= 15.884 \text{ kN} \\ M_{21} &= 20.669 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -8.384 \text{ kN} \\ M_{23} &= -6.466 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -11.616 \text{ kN} \\ M_{32} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

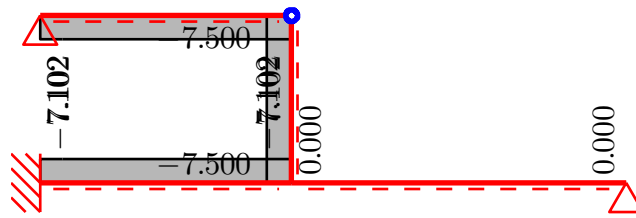
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= -7.102 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= -7.500 \text{ kN} \\ M_{45} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 7.102 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= -7.500 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 25:

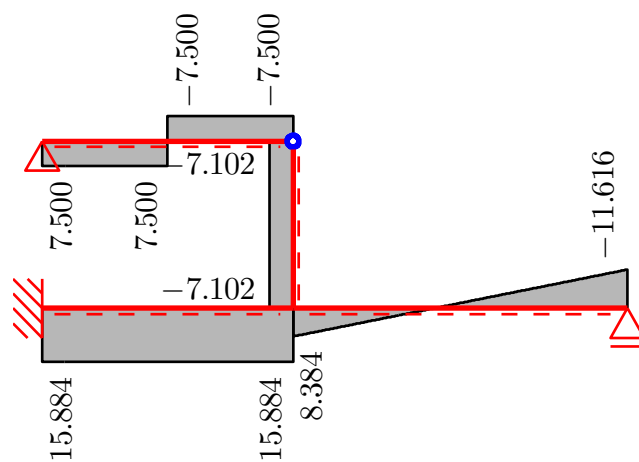
$$\begin{aligned} X_{25}^l &= 7.500 \text{ kN} \\ Z_{25}^l &= 7.102 \text{ kN} \\ M_{25} &= -14.203 \text{ kNm} \\ X_{52}^l &= -7.500 \text{ kN} \\ Z_{52}^l &= -7.102 \text{ kN} \\ M_{52} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

