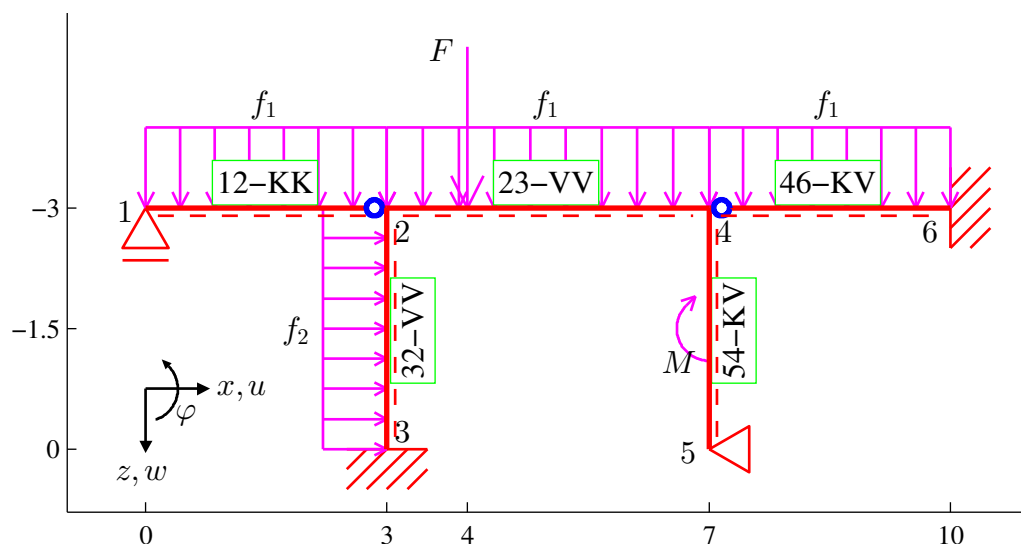


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 15 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 10 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F = 10 \text{ kN}$, momentem $M = 15 \text{ kNm}$, rovnoměrným spojitým zatížením $f_1 = 5 \text{ kN/m}$ a $f_2 = 4 \text{ kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = u_4 = u_6 = 0 \\ w_2 &= w_3 = 0 \\ w_4 &= w_5 = 0 \end{aligned}$$

Za základní neznámé tedy zvolíme φ_2, φ_4 .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentové podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} M_{23} + M_{24} &= 0 & \begin{array}{c} \text{red curved arrow} \\ \text{blue curved arrow} \end{array} & \begin{array}{c} M_{23} \\ M_{24} \end{array} \\ M_{42} + M_{45} &= 0 & \begin{array}{c} \text{red curved arrow} \\ \text{blue curved arrow} \end{array} & \begin{array}{c} M_{42} \\ M_{45} \end{array} \end{aligned}$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-KK (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= -\frac{L_{12} f_{1z}}{2} + 0 \\
&= -\frac{15}{2} + 0 \\
M_{12} &= 0 + 0 \\
Z_{21}^l &= -\frac{L_{12} f_{1z}}{2} + 0 \\
&= -\frac{15}{2} + 0 \\
M_{21} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 32-VV ($k_{32} = 2E_{32}I_{32}/L_{32} = 2250 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{32}^l &= -\frac{L_{32} f_{2z}}{2} - \frac{k_{32} \left(3\varphi_3 + 3\varphi_2 - \frac{6w_3^l - 6w_2^l}{L_{32}} \right)}{L_{32}} \\
&= -6 - 2250\varphi_2 \\
M_{32} &= \frac{L_{32}^2 f_{2z}}{12} + k_{32} \left(2\varphi_3 + \varphi_2 - \frac{3w_3^l - 3w_2^l}{L_{32}} \right) \\
&= 3 + 2250\varphi_2 \\
Z_{23}^l &= -\frac{L_{32} f_{2z}}{2} + \frac{k_{32} \left(3\varphi_3 + 3\varphi_2 - \frac{6w_3^l - 6w_2^l}{L_{32}} \right)}{L_{32}} \\
&= -6 + 2250\varphi_2 \\
M_{23} &= -\frac{L_{32}^2 f_{2z}}{12} + k_{32} \left(\varphi_3 + 2\varphi_2 - \frac{3w_3^l - 3w_2^l}{L_{32}} \right) \\
&= -3 + 4500\varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{32} &= Z_{32}^l & u_3^l &= -w_3 \\
Z_{32} &= -X_{32}^l & w_3^l &= u_3 \\
X_{23} &= Z_{23}^l & u_2^l &= -w_2 \\
Z_{23} &= -X_{23}^l & w_2^l &= u_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VV ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 1687 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{24}^l &= \frac{b_{24} F_z \left(\frac{a_{24}(a_{24}-b_{24})}{L_{24}^2} - 1 \right)}{L_{24}} - \frac{L_{24} f_{1z}}{2} - \frac{k_{24} \left(3\varphi_2 + 3\varphi_4 - \frac{6w_2^l - 6w_4^l}{L_{24}} \right)}{L_{24}} \\
&= -\frac{135}{16} - 10 - 1266\varphi_2 - 1266\varphi_4 \\
M_{24} &= \frac{a_{24} b_{24}^2 F_z}{L_{24}^2} + \frac{L_{24}^2 f_{1z}}{12} + k_{24} \left(2\varphi_2 + \varphi_4 - \frac{3w_2^l - 3w_4^l}{L_{24}} \right) \\
&= \frac{45}{8} + \frac{20}{3} + 3375\varphi_2 + 1688\varphi_4 \\
Z_{42}^l &= -\frac{a_{24} F_z \left(\frac{b_{24}(a_{24}-b_{24})}{L_{24}^2} + 1 \right)}{L_{24}} - \frac{L_{24} f_{1z}}{2} + \frac{k_{24} \left(3\varphi_2 + 3\varphi_4 - \frac{6w_2^l - 6w_4^l}{L_{24}} \right)}{L_{24}} \\
&= -\frac{25}{16} - 10 + 1266\varphi_2 + 1266\varphi_4 \\
M_{42} &= -\frac{a_{24}^2 b_{24} F_z}{L_{24}^2} - \frac{L_{24}^2 f_{1z}}{12} + k_{24} \left(\varphi_2 + 2\varphi_4 - \frac{3w_2^l - 3w_4^l}{L_{24}} \right) \\
&= -\frac{15}{8} - \frac{20}{3} + 1688\varphi_2 + 3375\varphi_4
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{24} &= X_{24}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{24} &= Z_{24}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{42} &= X_{42}^l & u_4^l &= u_4 \\
Z_{42} &= Z_{42}^l & w_4^l &= w_4
\end{aligned}$$

Prut 54-KV ($k_{54} = 2E_{54}I_{54}/L_{54} = 2250 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{54}^l &= -\frac{M \left(\frac{L_{54}^2 - 3a_{54}^2}{2L_{54}^2} + 1 \right)}{L_{54}} - \frac{3k_{54} \left(2\varphi_4 - \frac{2w_5^l - 2w_4^l}{L_{54}} \right)}{4L_{54}} \\
&= \frac{45}{8} - 1125\varphi_4 \\
M_{54} &= 0 + 0 \\
Z_{45}^l &= \frac{M \left(\frac{L_{54}^2 - 3a_{54}^2}{2L_{54}^2} + 1 \right)}{L_{54}} + \frac{3k_{54} \left(2\varphi_4 - \frac{2w_5^l - 2w_4^l}{L_{54}} \right)}{4L_{54}} \\
&= -\frac{45}{8} + 1125\varphi_4 \\
M_{45} &= \frac{M (L_{54}^2 - 3a_{54}^2)}{2L_{54}^2} + \frac{3k_{54} \left(2\varphi_4 - \frac{2w_5^l - 2w_4^l}{L_{54}} \right)}{4} \\
&= -\frac{15}{8} + 3375\varphi_4
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{54} &= Z_{54}^l & u_5^l &= -w_5 \\ Z_{54} &= -X_{54}^l & w_5^l &= u_5 \\ X_{45} &= Z_{45}^l & u_4^l &= -w_4 \\ Z_{45} &= -X_{45}^l & w_4^l &= u_4 \end{aligned}$$

Prut 46-KV ($k_{46} = 2E_{46}I_{46}/L_{46} = 2250 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{46}^l &= -\frac{3 L_{46} f_{1z}}{8} - \frac{3 k_{46} \left(2 \varphi_6 - \frac{2 w_4^l - 2 w_6^l}{L_{46}} \right)}{4 L_{46}} \\ &= -\frac{45}{8} + 0 \\ M_{46} &= 0 + 0 \\ Z_{64}^l &= -\frac{5 L_{46} f_{1z}}{8} + \frac{3 k_{46} \left(2 \varphi_6 - \frac{2 w_4^l - 2 w_6^l}{L_{46}} \right)}{4 L_{46}} \\ &= -\frac{75}{8} + 0 \\ M_{64} &= -\frac{L_{46}^2 f_{1z}}{8} + \frac{3 k_{46} \left(2 \varphi_6 - \frac{2 w_4^l - 2 w_6^l}{L_{46}} \right)}{4} \\ &= -\frac{45}{8} + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{46} &= X_{46}^l & u_4^l &= u_4 \\ Z_{46} &= Z_{46}^l & w_4^l &= w_4 \\ X_{64} &= X_{64}^l & u_6^l &= u_6 \\ Z_{64} &= Z_{64}^l & w_6^l &= w_6 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 7875 \varphi_2 + 1688 \varphi_4 + 9.292 &= 0 \\ 1688 \varphi_2 + 6750 \varphi_4 - 10.42 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -0.001596 \text{ rad} \\ \varphi_4 &= 0.001942 \text{ rad} \end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -7.500 \text{ kN} \\ M_{12} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -7.500 \text{ kN} \\ M_{21} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 32:

$$\begin{aligned} X_{32}^l &= 26.376 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -2.409 \text{ kN} \\ M_{32} &= -0.591 \text{ kNm} \\ X_{23}^l &= -26.376 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -9.591 \text{ kN} \\ M_{23} &= -10.182 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{24}^l &= 9.591 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= -18.876 \text{ kN} \\ M_{24} &= 10.182 \text{ kNm} \\ X_{42}^l &= -9.591 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= -11.124 \text{ kN} \\ M_{42} &= -4.680 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 54:

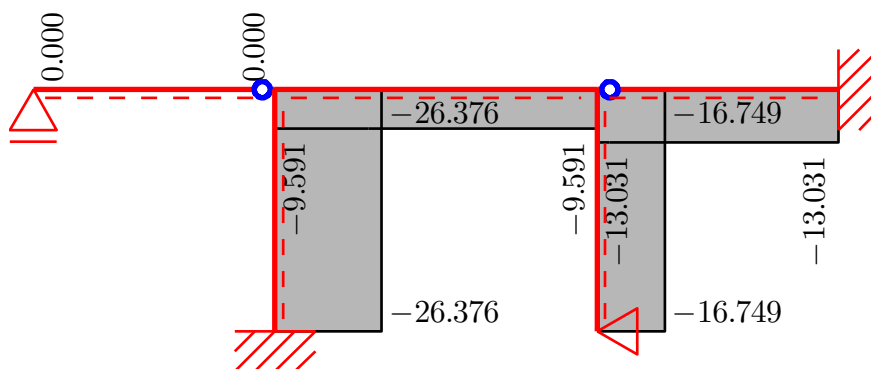
$$\begin{aligned} X_{54}^l &= 16.749 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= 3.440 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{45}^l &= -16.749 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= -3.440 \text{ kN} \\ M_{45} &= 4.680 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 46:

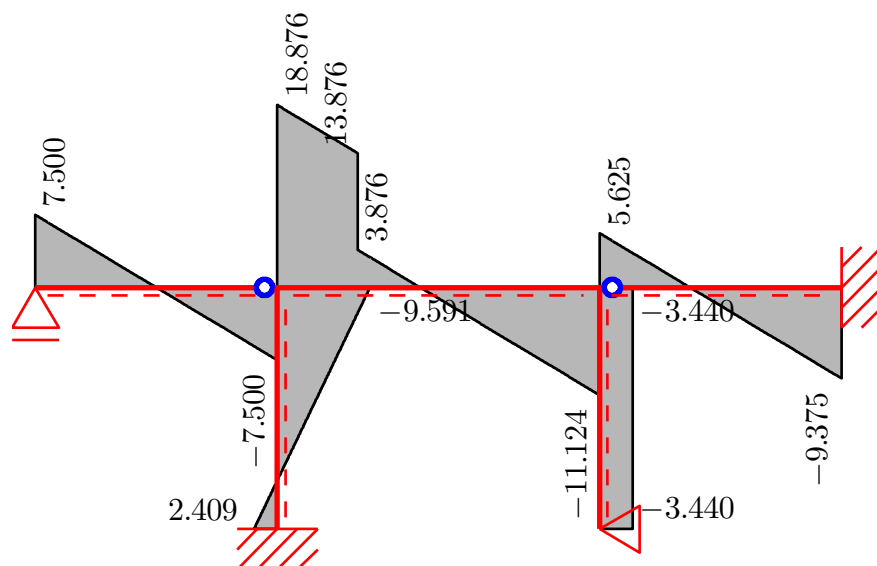
$$\begin{aligned} X_{46}^l &= 13.031 \text{ kN} \\ Z_{46}^l &= -5.625 \text{ kN} \\ M_{46} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{64}^l &= -13.031 \text{ kN} \\ Z_{64}^l &= -9.375 \text{ kN} \\ M_{64} &= -5.625 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

