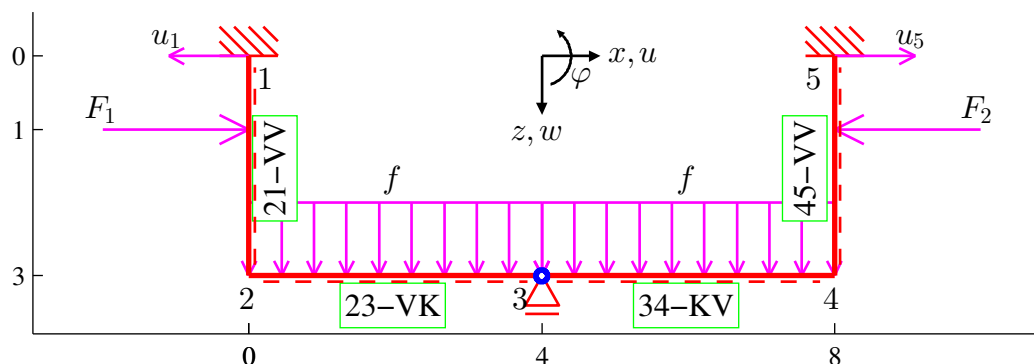


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 30 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F_1 = F_2 = 10 \text{ kN}$, rovnoměrným spojitým zatížením $f = 5 \text{ kN/m}$ a posunem $u_1 = u_5 = 3 \text{ cm}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_2 = u_3 = u_4$$

$$w_1 = w_2 = 0$$

$$w_5 = w_4 = 0$$

Za základní neznámé tedy zvolíme $\varphi_2, \varphi_4, u_2$.

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentové podmínky rovnováhy

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{43} + M_{45} = 0$$

- Patrová podmínka rovnováhy

$$X_{21} + X_{45} = 0 + 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 21-VV ($k_{21} = 2E_{21}I_{21}/L_{21} = 9000 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{21}^l &= \frac{b_{21} F_{1z} \left(\frac{a_{21}(a_{21}-b_{21})}{L_{21}^2} - 1 \right)}{L_{21}} - \frac{k_{21} \left(3\varphi_2 + 3\varphi_1 - \frac{6w_2^l - 6w_1^l}{L_{21}} \right)}{L_{21}} \\
 &= -\frac{70}{27} + 6000 w_2^l - 9000 \varphi_2 + 30 \\
 M_{21} &= \frac{a_{21} b_{21}^2 F_{1z}}{L_{21}^2} + k_{21} \left(2\varphi_2 + \varphi_1 - \frac{3w_2^l - 3w_1^l}{L_{21}} \right) \\
 &= \frac{20}{9} + 1.8 \cdot 10^4 \varphi_2 - 9000 w_2^l - 45 \\
 Z_{12}^l &= -\frac{a_{21} F_{1z} \left(\frac{b_{21}(a_{21}-b_{21})}{L_{21}^2} + 1 \right)}{L_{21}} + \frac{k_{21} \left(3\varphi_2 + 3\varphi_1 - \frac{6w_2^l - 6w_1^l}{L_{21}} \right)}{L_{21}} \\
 &= -\frac{200}{27} + 9000 \varphi_2 - 6000 w_2^l - 30 \\
 M_{12} &= -\frac{a_{21}^2 b_{21} F_{1z}}{L_{21}^2} + k_{21} \left(\varphi_2 + 2\varphi_1 - \frac{3w_2^l - 3w_1^l}{L_{21}} \right) \\
 &= -\frac{40}{9} + 9000 \varphi_2 - 9000 w_2^l - 45
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{21} &= Z_{21}^l & u_2^l &= -w_2 \\
 Z_{21} &= -X_{21}^l & w_2^l &= u_2 \\
 X_{12} &= Z_{12}^l & u_1^l &= -w_1 \\
 Z_{12} &= -X_{12}^l & w_1^l &= u_1
 \end{aligned}$$

Prut 23-VK ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 6750 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^l &= -\frac{5 L_{23} f_z}{8} - \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\
&= -\frac{25}{2} - 2531 \varphi_2 \\
M_{23} &= \frac{L_{23}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4} \\
&= 10 + 1.013 \cdot 10^4 \varphi_2 \\
Z_{32}^l &= -\frac{3 L_{23} f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\
&= -\frac{15}{2} + 2531 \varphi_2 \\
M_{32} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\
Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3
\end{aligned}$$

Prut 34-KV ($k_{34} = 2E_{34}I_{34}/L_{34} = 6750 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{34}^l &= -\frac{3 L_{34} f_z}{8} - \frac{3 k_{34} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_3^l - 2 w_4^l}{L_{34}} \right)}{4 L_{34}} \\
&= -\frac{15}{2} - 2531 \varphi_4 \\
M_{34} &= 0 + 0 \\
Z_{43}^l &= -\frac{5 L_{34} f_z}{8} + \frac{3 k_{34} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_3^l - 2 w_4^l}{L_{34}} \right)}{4 L_{34}} \\
&= -\frac{25}{2} + 2531 \varphi_4 \\
M_{43} &= -\frac{L_{34}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{34} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_3^l - 2 w_4^l}{L_{34}} \right)}{4} \\
&= -10 + 1.013 \cdot 10^4 \varphi_4
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{34} &= X_{34}^l & u_3^l &= u_3 \\
Z_{34} &= Z_{34}^l & w_3^l &= w_3 \\
X_{43} &= X_{43}^l & u_4^l &= u_4 \\
Z_{43} &= Z_{43}^l & w_4^l &= w_4
\end{aligned}$$

Prut 45-VV ($k_{45} = 2E_{45}I_{45}/L_{45} = 9000 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{45}^l &= \frac{b_{45} F_{2z} \left(\frac{a_{45}(a_{45}-b_{45})}{L_{45}^2} - 1 \right)}{L_{45}} - \frac{k_{45} \left(3\varphi_4 + 3\varphi_5 - \frac{6w_4^l - 6w_5^l}{L_{45}} \right)}{L_{45}} \\
 &= \frac{70}{27} + 6000 w_4^l - 9000 \varphi_4 - 30 \\
 M_{45} &= \frac{a_{45} b_{45}^2 F_{2z}}{L_{45}^2} + k_{45} \left(2\varphi_4 + \varphi_5 - \frac{3w_4^l - 3w_5^l}{L_{45}} \right) \\
 &= -\frac{20}{9} + 1.8 \cdot 10^4 \varphi_4 - 9000 w_4^l + 45 \\
 Z_{54}^l &= -\frac{a_{45} F_{2z} \left(\frac{b_{45}(a_{45}-b_{45})}{L_{45}^2} + 1 \right)}{L_{45}} + \frac{k_{45} \left(3\varphi_4 + 3\varphi_5 - \frac{6w_4^l - 6w_5^l}{L_{45}} \right)}{L_{45}} \\
 &= \frac{200}{27} + 9000 \varphi_4 - 6000 w_4^l + 30 \\
 M_{54} &= -\frac{a_{45}^2 b_{45} F_{2z}}{L_{45}^2} + k_{45} \left(\varphi_4 + 2\varphi_5 - \frac{3w_4^l - 3w_5^l}{L_{45}} \right) \\
 &= \frac{40}{9} + 9000 \varphi_4 - 9000 w_4^l + 45
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{45} &= Z_{45}^l & u_4^l &= -w_4 \\
 Z_{45} &= -X_{45}^l & w_4^l &= u_4 \\
 X_{54} &= Z_{54}^l & u_5^l &= -w_5 \\
 Z_{54} &= -X_{54}^l & w_5^l &= u_5
 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
 2.813 \cdot 10^4 \varphi_2 - 9000 u_2 - 32.78 &= 0 \\
 2.813 \cdot 10^4 \varphi_4 - 9000 u_2 + 32.78 &= 0 \\
 1.2 \cdot 10^4 u_2 - 9000 \varphi_4 - 9000 \varphi_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= 0.001165 \text{ rad} \\
 \varphi_4 &= -0.001165 \text{ rad} \\
 u_2 &= 0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 21:

$$\begin{aligned} X_{21}^l &= -15.450 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= 16.919 \text{ kN} \\ M_{21} &= -21.800 \text{ kNm} \\ X_{12}^l &= 15.450 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -26.919 \text{ kN} \\ M_{12} &= -38.956 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= -16.919 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -15.450 \text{ kN} \\ M_{23} &= 21.800 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= 16.919 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -4.550 \text{ kN} \\ M_{32} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 34:

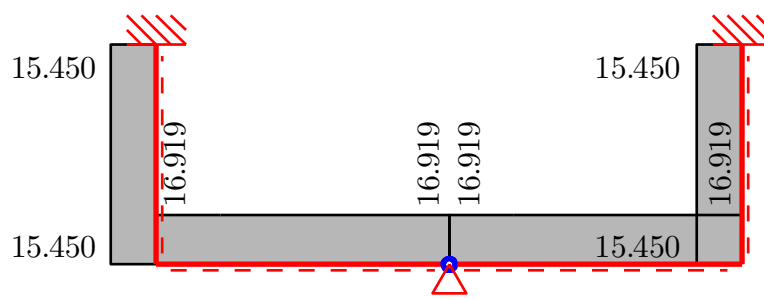
$$\begin{aligned} X_{34}^l &= -16.919 \text{ kN} \\ Z_{34}^l &= -4.550 \text{ kN} \\ M_{34} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{43}^l &= 16.919 \text{ kN} \\ Z_{43}^l &= -15.450 \text{ kN} \\ M_{43} &= -21.800 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

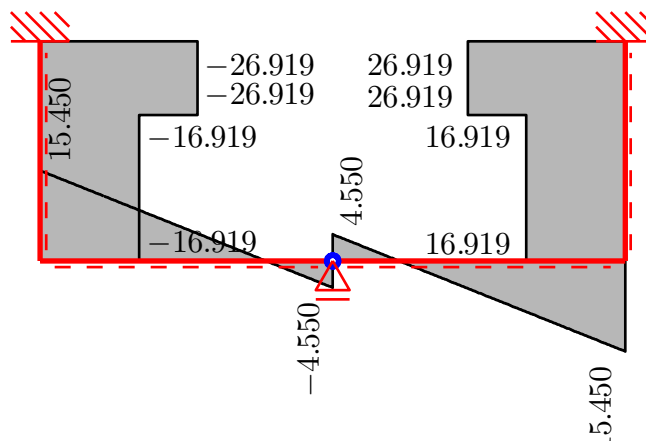
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= -15.450 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= -16.919 \text{ kN} \\ M_{45} &= 21.800 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 15.450 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= 26.919 \text{ kN} \\ M_{54} &= 38.956 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

