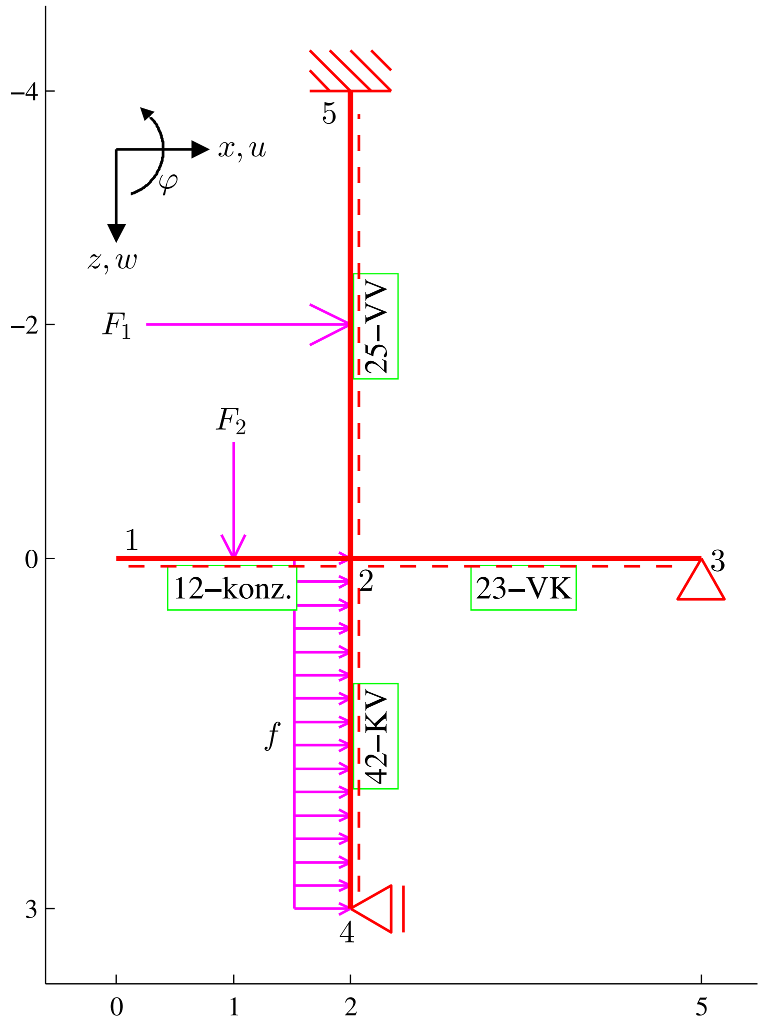
Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 30\,\mathrm{GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F_1 = 7\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 4\,\mathrm{kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 6\,\mathrm{kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



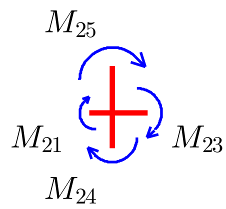
Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$
$$w_5 = w_2 = w_4 = 0$$

Za základní neznámou tedy zvolíme φ_2.
Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy



$$M_{21} + M_{23} + M_{24} + M_{25} = 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-konz. (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z^l_{12} &= 0 + 0 \\ M_{12} &= 0 + 0 \\ Z^l_{21} &= -F_{2z} + 0 \\ &= -4 + 0 \\ M_{21} &= -b_{12}\, F_{2z} + 0 \\ &= -4 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{12} &= X^l_{12} & \quad u^l_1 &= u_1 \\ Z_{12} &= Z^l_{12} & \quad w^l_1 &= w_1 \\ X_{21} &= X^l_{21} & \quad u^l_2 &= u_2 \\ Z_{21} &= Z^l_{21} & \quad w^l_2 &= w_2 \end{aligned}$$

Prut 23-VK ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 9000\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z^l_{23} &= 0 - \frac{3\,k_{23}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2 - 2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\ &= 0 - 4500\,\varphi_2 \\ M_{23} &= 0 + \frac{3\,k_{23}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2 - 2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4} \\ &= 0 + 1.35 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\ Z^l_{32} &= 0 + \frac{3\,k_{23}\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2 - 2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\ &= 0 + 4500\,\varphi_2 \\ M_{32} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{23} &= X_{23}^l \qquad & u_2^l &= u_2 \\ Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\ X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\ Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3 \end{aligned}$$

Prut 42-KV (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{42}^l &= -\frac{3\,L_{42}\,f_z}{8} - \frac{3\,k_{42}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w_4^l - 2\,w_2^l}{L_{42}}\right)}{4\,L_{42}} \\ &= -\frac{27}{4} - 4500\,\varphi_2 \\ M_{42} &= 0 + 0 \\ Z_{24}^l &= -\frac{5\,L_{42}\,f_z}{8} + \frac{3\,k_{42}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w_4^l - 2\,w_2^l}{L_{42}}\right)}{4\,L_{42}} \\ &= -\frac{45}{4} + 4500\,\varphi_2 \\ M_{24} &= -\frac{{L_{42}}^2\,f_z}{8} + \frac{3\,k_{42}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w_4^l - 2\,w_2^l}{L_{42}}\right)}{4} \\ &= -\frac{27}{4} + 1.35 \cdot 10^4\,\varphi_2 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{42} &= Z_{42}^l \qquad & u_4^l &= -w_4 \\ Z_{42} &= -X_{42}^l & w_4^l &= u_4 \\ X_{24} &= Z_{24}^l & u_2^l &= -w_2 \\ Z_{24} &= -X_{24}^l & w_2^l &= u_2 \end{aligned}$$

Prut 25-VV ($k_{25} = 2E_{25}I_{25}/L_{25} = 6750\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z_{25}^{l} &= \frac{b_{25}\,F_{1z}\,\left(\frac{a_{25}\,(a_{25}-b_{25})}{{L_{25}}^{2}}-1\right)}{L_{25}} - \frac{k_{25}\,\left(3\,\varphi_2+3\,\varphi_5-\frac{6\,w_2^l-6\,w_5^l}{L_{25}}\right)}{L_{25}} \\
&= -\frac{7}{2}-5063\,\varphi_2 \\
M_{25} &= \frac{a_{25}\,{b_{25}}^{2}\,F_{1z}}{{L_{25}}^{2}}+k_{25}\,\left(2\,\varphi_2+\varphi_5-\frac{3\,w_2^l-3\,w_5^l}{L_{25}}\right) \\
&= \frac{7}{2}+1.35\cdot 10^{4}\,\varphi_2 \\
Z_{52}^{l} &= -\frac{a_{25}\,F_{1z}\,\left(\frac{b_{25}\,(a_{25}-b_{25})}{{L_{25}}^{2}}+1\right)}{L_{25}} + \frac{k_{25}\,\left(3\,\varphi_2+3\,\varphi_5-\frac{6\,w_2^l-6\,w_5^l}{L_{25}}\right)}{L_{25}} \\
&= -\frac{7}{2}+5063\,\varphi_2 \\
M_{52} &= -\frac{{a_{25}}^{2}\,b_{25}\,F_{1z}}{{L_{25}}^{2}}+k_{25}\,\left(\varphi_2+2\,\varphi_5-\frac{3\,w_2^l-3\,w_5^l}{L_{25}}\right) \\
&= -\frac{7}{2}+6750\,\varphi_2
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{aligned}
X_{25} &= Z_{25}^{l} & \qquad u_2^l &= -w_2 \\
Z_{25} &= -X_{25}^{l} & w_2^l &= u_2 \\
X_{52} &= Z_{52}^{l} & u_5^l &= -w_5 \\
Z_{52} &= -X_{52}^{l} & w_5^l &= u_5
\end{aligned}
$$

Po dosazení koncových sil do podmínky rovnováhy dostaneme rovnici:

$$4.05\cdot 10^{4}\,\varphi_2-7.25=0$$

Vyřešením rovnice o jedné neznámé obdržíme hodnotu deformace

$$\varphi_2=0.000179\,\mathrm{rad}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnících.

Prut 12:

$$X_{12}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{12}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$M_{12} = 0.000\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{21}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{21}^l = -4.000\,\mathrm{kN}$$
$$M_{21} = -4.000\,\mathrm{kNm}$$

Prut 23:

$$X_{23}^l = 14.851\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{23}^l = -0.806\,\mathrm{kN}$$
$$M_{23} = 2.417\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{32}^l = -14.851\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{32}^l = 0.806\,\mathrm{kN}$$
$$M_{32} = 0.000\,\mathrm{kNm}$$

Prut 42:

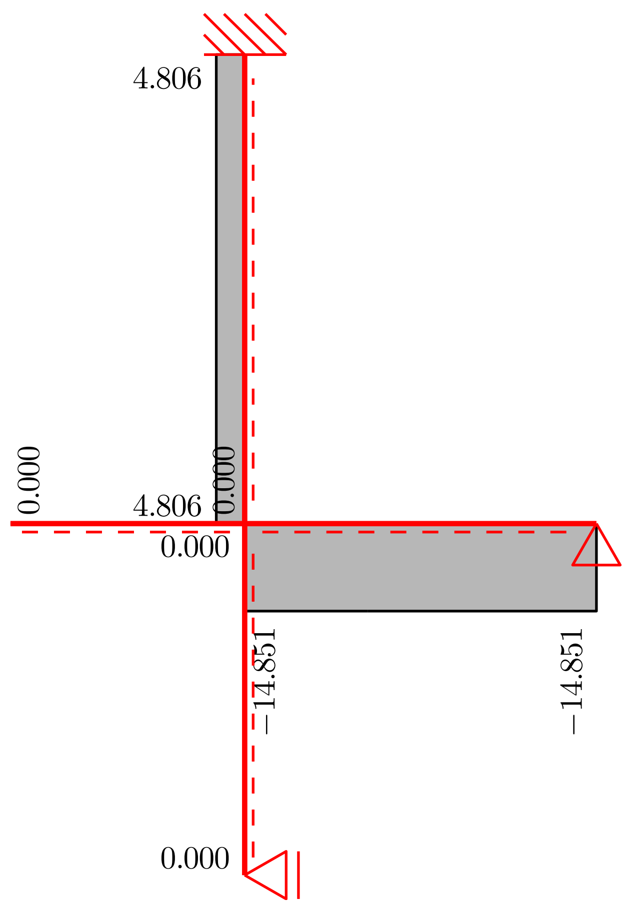
$$X_{42}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{42}^l = -7.556\,\mathrm{kN}$$
$$M_{42} = 0.000\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{24}^l = 0.000\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{24}^l = -10.444\,\mathrm{kN}$$
$$M_{24} = -4.333\,\mathrm{kNm}$$

Prut 25:

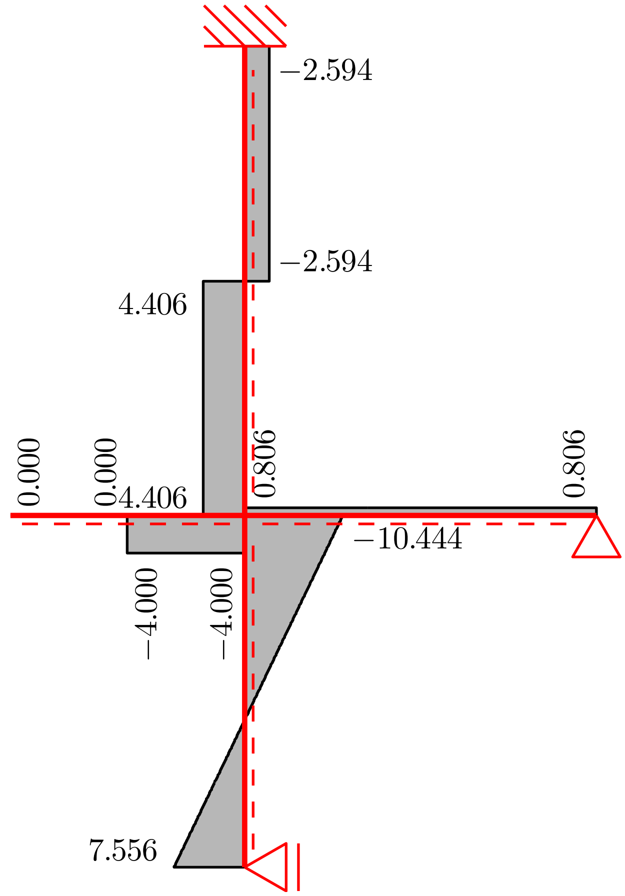
$$X_{25}^l = -4.806\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{25}^l = -4.406\,\mathrm{kN}$$
$$M_{25} = 5.917\,\mathrm{kNm}$$
$$X_{52}^l = 4.806\,\mathrm{kN}$$
$$Z_{52}^l = -2.594\,\mathrm{kN}$$
$$M_{52} = -2.292\,\mathrm{kNm}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

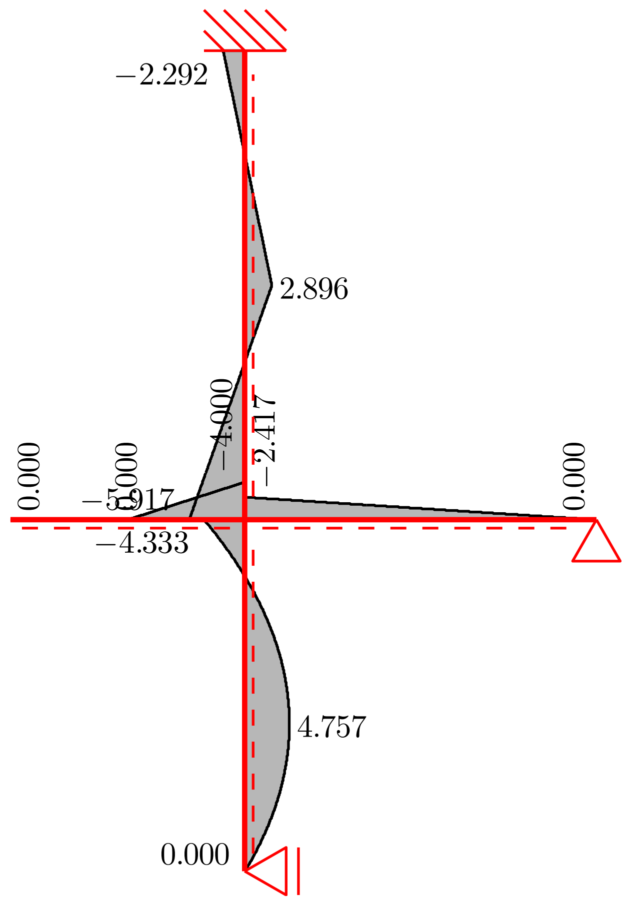
- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]


−2.292
2.896
−4.000
−2.417
0.000
0.000
−5.917
0.000
−4.333
4.757
0.000