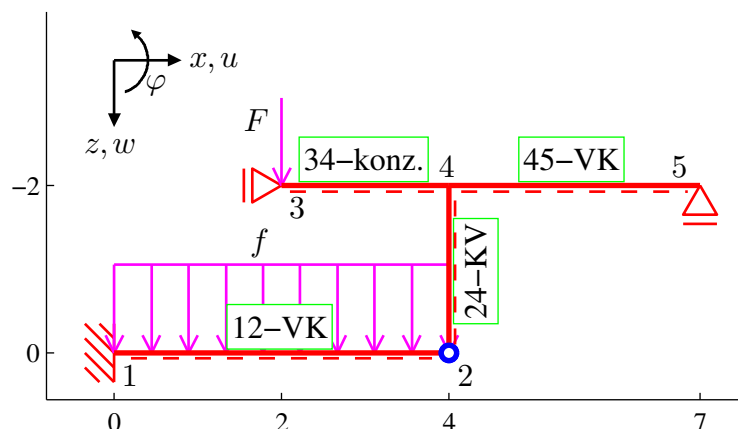


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají čtvercový průřez o rozměrech 40 x 40 cm a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 15 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F = 10 \text{ kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 5 \text{ kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

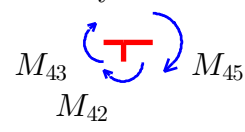
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$\begin{aligned} w_4 &= w_2 \\ u_3 &= u_4 = u_5 = 0 \\ u_1 &= u_2 = 0 \end{aligned}$$

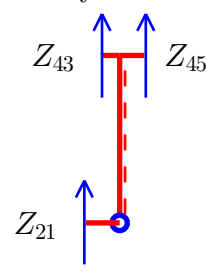
Za základní neznámé tedy zvolíme φ_4, w_4 .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{42} + M_{43} + M_{45} = 0$$


- Sloupová podmínka rovnováhy

$$Z_{43} + Z_{45} + Z_{21} = 0$$


Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VK ($k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{12}^l &= -\frac{5 L_{12} f_z}{8} - \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
 &= -\frac{25}{2} - 1500 w_2^l \\
 M_{12} &= \frac{L_{12}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4} \\
 &= 10 + 6000 w_2^l \\
 Z_{21}^l &= -\frac{3 L_{12} f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
 &= -\frac{15}{2} + 1500 w_2^l \\
 M_{21} &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
 Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
 X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
 Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
 \end{aligned}$$

Prut 24-KV ($k_{24} = 2E_{24}I_{24}/L_{24} = 3.2 \cdot 10^4 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{24}^l &= 0 - \frac{3 k_{24} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4 L_{24}} \\
 &= 0 - 2.4 \cdot 10^4 \varphi_4 \\
 M_{24} &= 0 + 0 \\
 Z_{42}^l &= 0 + \frac{3 k_{24} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4 L_{24}} \\
 &= 0 + 2.4 \cdot 10^4 \varphi_4 \\
 M_{42} &= 0 + \frac{3 k_{24} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4} \\
 &= 0 + 4.8 \cdot 10^4 \varphi_4
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{24} &= Z_{24}^l & u_2^l &= -w_2 \\
 Z_{24} &= -X_{24}^l & w_2^l &= u_2 \\
 X_{42} &= Z_{42}^l & u_4^l &= -w_4 \\
 Z_{42} &= -X_{42}^l & w_4^l &= u_4
 \end{aligned}$$

Prut 34-konz. (z hlediska ohybu staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{34}^l &= 0 + 0 \\
 M_{34} &= 0 + 0 \\
 Z_{43}^l &= -F_z + 0 \\
 &= -10 + 0 \\
 M_{43} &= -b_{34} F_z + 0 \\
 &= -20 + 0
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{34} &= X_{34}^l & u_3^l &= u_3 \\
 Z_{34} &= Z_{34}^l & w_3^l &= w_3 \\
 X_{43} &= X_{43}^l & u_4^l &= u_4 \\
 Z_{43} &= Z_{43}^l & w_4^l &= w_4
 \end{aligned}$$

Prut 45-VK (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{45}^l &= 0 - \frac{3 k_{45} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_4^l - 2 w_5^l}{L_{45}} \right)}{4 L_{45}} \\
 &= 0 + 3556 w_4^l - 1.067 \cdot 10^4 \varphi_4 \\
 M_{45} &= 0 + \frac{3 k_{45} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_4^l - 2 w_5^l}{L_{45}} \right)}{4} \\
 &= 0 + 3.2 \cdot 10^4 \varphi_4 - 1.067 \cdot 10^4 w_4^l \\
 Z_{54}^l &= 0 + \frac{3 k_{45} \left(2 \varphi_4 - \frac{2 w_4^l - 2 w_5^l}{L_{45}} \right)}{4 L_{45}} \\
 &= 0 + 1.067 \cdot 10^4 \varphi_4 - 3556 w_4^l \\
 M_{54} &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{45} &= X_{45}^l & u_4^l &= u_4 \\
 Z_{45} &= Z_{45}^l & w_4^l &= w_4 \\
 X_{54} &= X_{54}^l & u_5^l &= u_5 \\
 Z_{54} &= Z_{54}^l & w_5^l &= w_5
 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
 8 \cdot 10^4 \varphi_4 - 1.067 \cdot 10^4 w_4 - 20 &= 0 \\
 5056 w_4 - 1.067 \cdot 10^4 \varphi_4 - 17.5 &= 0
 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\varphi_4 = 0.0009901 \text{ rad}$$

$$w_4 = 0.00555 \text{ m}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= -23.761 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -20.826 \text{ kN} \\ M_{12} &= 43.303 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 23.761 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= 0.826 \text{ kN} \\ M_{21} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 24:

$$\begin{aligned} X_{24}^l &= 0.826 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= -23.761 \text{ kN} \\ M_{24} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{42}^l &= -0.826 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= 23.761 \text{ kN} \\ M_{42} &= 47.523 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 34:

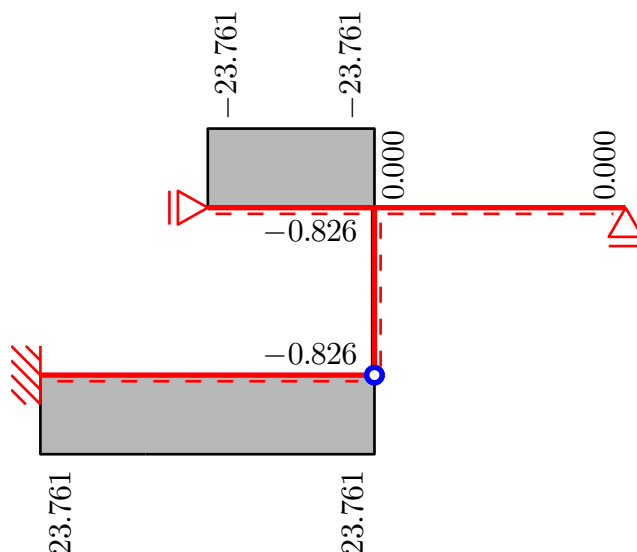
$$\begin{aligned} X_{34}^l &= 23.761 \text{ kN} \\ Z_{34}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ M_{34} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{43}^l &= -23.761 \text{ kN} \\ Z_{43}^l &= -10.000 \text{ kN} \\ M_{43} &= -20.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

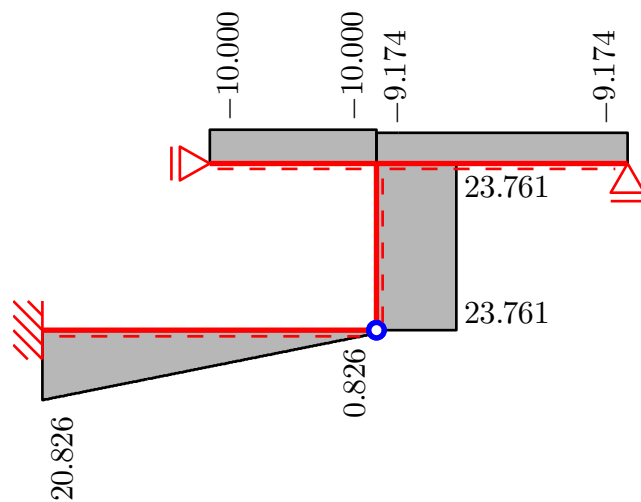
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= 9.174 \text{ kN} \\ M_{45} &= -27.523 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= -9.174 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

