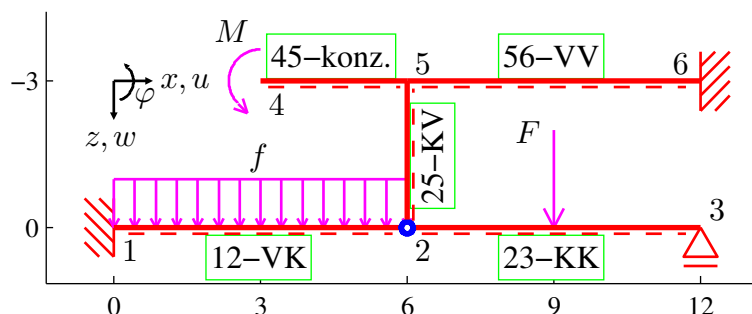


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil ( $M, V, N$ ) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 40 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je  $E = 30 \text{ GPa}$ . Konstrukce je zatížena silou  $F = 20 \text{ kN}$ , momentem  $M = 10 \text{ kNm}$ , a rovnoměrným spojitým zatížením  $f = 10 \text{ kN/m}$ . (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

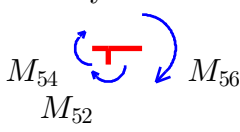
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$\begin{aligned} w_5 &= w_2 \\ u_4 &= u_5 = u_6 = 0 \\ u_1 &= u_2 = u_3 = 0 \end{aligned}$$

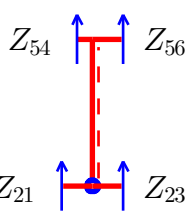
Za základní neznámé tedy zvolíme  $\varphi_5, w_5$ .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{52} + M_{54} + M_{56} = 0$$


- Sloupová podmínka rovnováhy

$$Z_{54} + Z_{56} + Z_{21} + Z_{23} = 0$$


Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VK ( $k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 1.067 \cdot 10^4 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= -\frac{5 L_{12} f_z}{8} - \frac{3 k_{12} \left( 2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
&= -\frac{75}{2} - 444.4 w_2^l \\
M_{12} &= \frac{L_{12}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left( 2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4} \\
&= 45 + 2667 w_2^l \\
Z_{21}^l &= -\frac{3 L_{12} f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left( 2 \varphi_1 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
&= -\frac{45}{2} + 444.4 w_2^l \\
M_{21} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-KK (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^l &= -\frac{b_{23} F_z}{L_{23}} + 0 \\
&= -10 + 0 \\
M_{23} &= 0 + 0 \\
Z_{32}^l &= -\frac{a_{23} F_z}{L_{23}} + 0 \\
&= -10 + 0 \\
M_{32} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\
Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3
\end{aligned}$$

Prut 25-KV ( $k_{25} = 2E_{25}I_{25}/L_{25} = 2.133 \cdot 10^4 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{25}^l &= 0 - \frac{3 k_{25} \left( 2 \varphi_5 - \frac{2 w_2^l - 2 w_5^l}{L_{25}} \right)}{4 L_{25}} \\
&= 0 - 1.067 \cdot 10^4 \varphi_5 \\
M_{25} &= 0 + 0 \\
Z_{52}^l &= 0 + \frac{3 k_{25} \left( 2 \varphi_5 - \frac{2 w_2^l - 2 w_5^l}{L_{25}} \right)}{4 L_{25}} \\
&= 0 + 1.067 \cdot 10^4 \varphi_5 \\
M_{52} &= 0 + \frac{3 k_{25} \left( 2 \varphi_5 - \frac{2 w_2^l - 2 w_5^l}{L_{25}} \right)}{4} \\
&= 0 + 3.2 \cdot 10^4 \varphi_5
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{25} &= Z_{25}^l & u_2^l &= -w_2 \\
Z_{25} &= -X_{25}^l & w_2^l &= u_2 \\
X_{52} &= Z_{52}^l & u_5^l &= -w_5 \\
Z_{52} &= -X_{52}^l & w_5^l &= u_5
\end{aligned}$$

Prut 45-konz. (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{45}^l &= 0 + 0 \\
M_{45} &= 0 + 0 \\
Z_{54}^l &= 0 + 0 \\
M_{54} &= -M + 0 \\
&= -10 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{45} &= X_{45}^l & u_4^l &= u_4 \\
Z_{45} &= Z_{45}^l & w_4^l &= w_4 \\
X_{54} &= X_{54}^l & u_5^l &= u_5 \\
Z_{54} &= Z_{54}^l & w_5^l &= w_5
\end{aligned}$$

Prut 56-VV ( $k_{56} = 2E_{56}I_{56}/L_{56} = 1.067 \cdot 10^4 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{56}^l &= 0 - \frac{k_{56} \left( 3\varphi_5 + 3\varphi_6 - \frac{6w_5^l - 6w_6^l}{L_{56}} \right)}{L_{56}} \\
&= 0 + 1778 w_5^l - 5333 \varphi_5 \\
M_{56} &= 0 + k_{56} \left( 2\varphi_5 + \varphi_6 - \frac{3w_5^l - 3w_6^l}{L_{56}} \right) \\
&= 0 + 2.133 \cdot 10^4 \varphi_5 - 5333 w_5^l \\
Z_{65}^l &= 0 + \frac{k_{56} \left( 3\varphi_5 + 3\varphi_6 - \frac{6w_5^l - 6w_6^l}{L_{56}} \right)}{L_{56}} \\
&= 0 + 5333 \varphi_5 - 1778 w_5^l \\
M_{65} &= 0 + k_{56} \left( \varphi_5 + 2\varphi_6 - \frac{3w_5^l - 3w_6^l}{L_{56}} \right) \\
&= 0 + 1.067 \cdot 10^4 \varphi_5 - 5333 w_5^l
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{56} &= X_{56}^l & u_5^l &= u_5 \\
Z_{56} &= Z_{56}^l & w_5^l &= w_5 \\
X_{65} &= X_{65}^l & u_6^l &= u_6 \\
Z_{65} &= Z_{65}^l & w_6^l &= w_6
\end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
5.333 \cdot 10^4 \varphi_5 - 5333 w_5 - 10 &= 0 \\
2222 w_5 - 5333 \varphi_5 - 32.5 &= 0
\end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= 0.002171 \text{ rad} \\
w_5 &= 0.01984 \text{ m}
\end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= -23.158 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -46.316 \text{ kN} \\ M_{12} &= 97.895 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 23.158 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -13.684 \text{ kN} \\ M_{21} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -10.000 \text{ kN} \\ M_{23} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -10.000 \text{ kN} \\ M_{32} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 25:

$$\begin{aligned} X_{25}^l &= -23.684 \text{ kN} \\ Z_{25}^l &= -23.158 \text{ kN} \\ M_{25} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{52}^l &= 23.684 \text{ kN} \\ Z_{52}^l &= 23.158 \text{ kN} \\ M_{52} &= 69.474 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

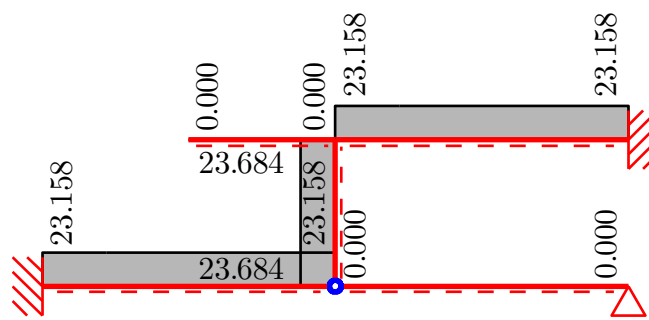
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ M_{45} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ M_{54} &= -10.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 56:

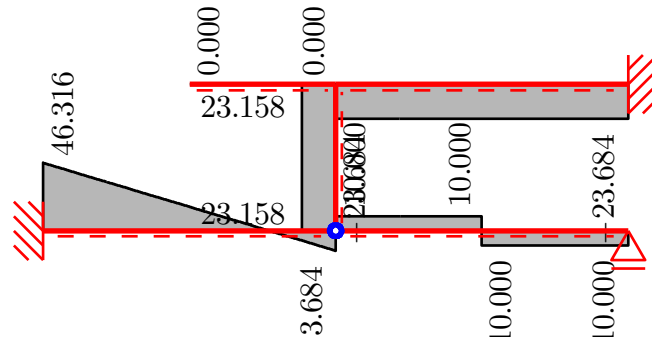
$$\begin{aligned} X_{56}^l &= -23.158 \text{ kN} \\ Z_{56}^l &= 23.684 \text{ kN} \\ M_{56} &= -59.474 \text{ kNm} \\ X_{65}^l &= 23.158 \text{ kN} \\ Z_{65}^l &= -23.684 \text{ kN} \\ M_{65} &= -82.632 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly  $N$  [kN]



- Posouvající síly  $V$  [kN]



- Ohybové momenty  $M$  [kNm]

