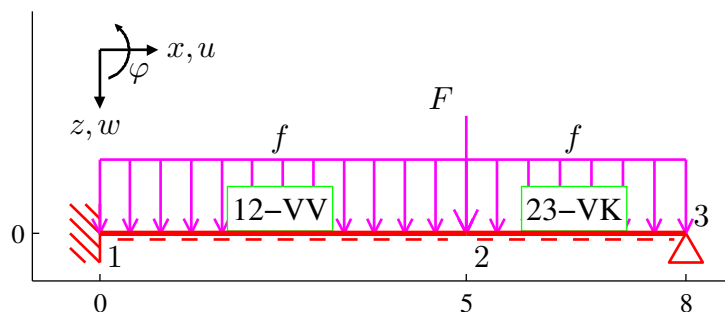


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 15 x 30 cm (šířka x výška). Prut "12" je vyroben z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 30 \text{ GPa}$, prut "23" má modul pružnosti $E = 10 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F = 8 \text{ kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 5 \text{ kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

Za základní neznámé tedy zvolíme φ_2, w_2 .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

- Sloupová podmínka rovnováhy

$$Z_{21} + Z_{23} = 8$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VV ($k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 4050 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= -\frac{L_{12} f_z}{2} - \frac{k_{12} \left(3 \varphi_1 + 3 \varphi_2 - \frac{6 w_1^l - 6 w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
&= -\frac{25}{2} - 2430 \varphi_2 - 972 w_2^l \\
M_{12} &= \frac{L_{12}^2 f_z}{12} + k_{12} \left(2 \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{3 w_1^l - 3 w_2^l}{L_{12}} \right) \\
&= \frac{125}{12} + 4050 \varphi_2 + 2430 w_2^l \\
Z_{21}^l &= -\frac{L_{12} f_z}{2} + \frac{k_{12} \left(3 \varphi_1 + 3 \varphi_2 - \frac{6 w_1^l - 6 w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
&= -\frac{25}{2} + 2430 \varphi_2 + 972 w_2^l \\
M_{21} &= -\frac{L_{12}^2 f_z}{12} + k_{12} \left(\varphi_1 + 2 \varphi_2 - \frac{3 w_1^l - 3 w_2^l}{L_{12}} \right) \\
&= -\frac{125}{12} + 8100 \varphi_2 + 2430 w_2^l
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VK ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 2250 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^l &= -\frac{5 L_{23} f_z}{8} - \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\
&= -\frac{75}{8} + 375 w_2^l - 1125 \varphi_2 \\
M_{23} &= \frac{L_{23}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4} \\
&= \frac{45}{8} + 3375 \varphi_2 - 1125 w_2^l \\
Z_{32}^l &= -\frac{3 L_{23} f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\
&= -\frac{45}{8} + 1125 \varphi_2 - 375 w_2^l \\
M_{32} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\ Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\ X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\ Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1.148 \cdot 10^4 \varphi_2 + 1305 w_2 - 4.792 &= 0 \\ 1305 \varphi_2 + 1347 w_2 - 29.88 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -0.002365 \text{ rad} \\ w_2 &= 0.02447 \text{ m} \end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -30.538 \text{ kN} \\ M_{12} &= 60.300 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= 5.538 \text{ kN} \\ M_{21} &= 29.887 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= 2.462 \text{ kN} \\ M_{23} &= -29.887 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -17.462 \text{ kN} \\ M_{32} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]

- Ohybové momenty M [kNm]

