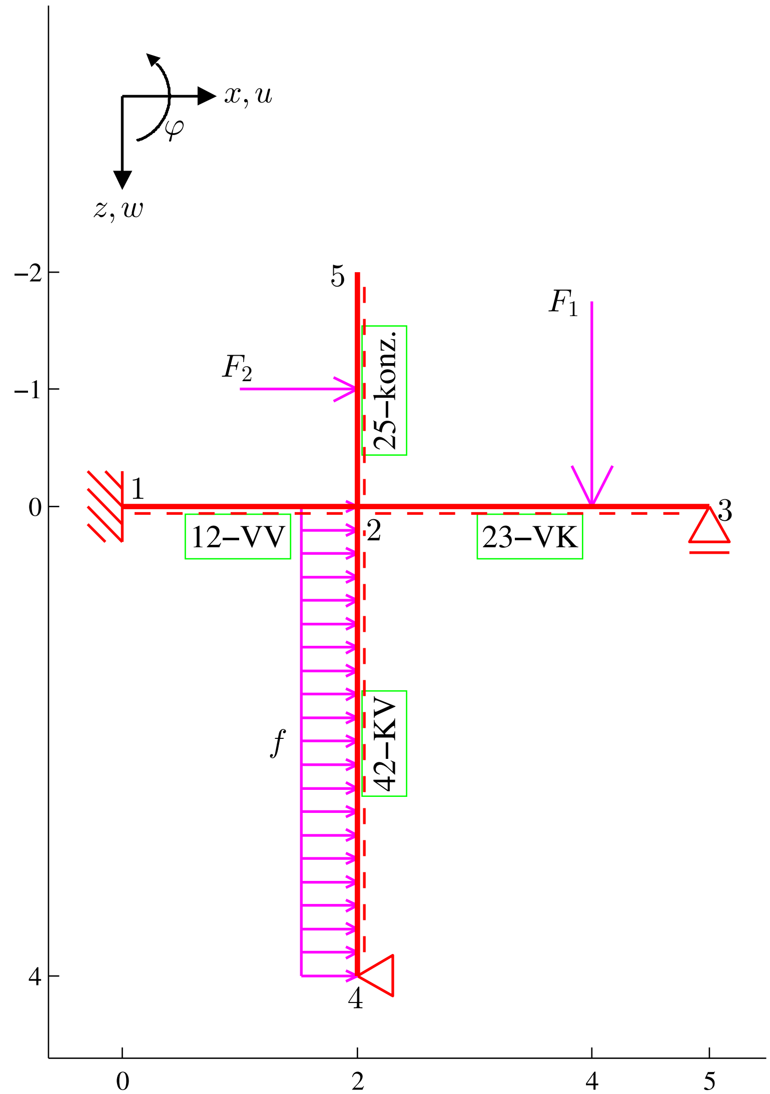
Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 30\,\mathrm{GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F_1 = 7\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 4\,\mathrm{kN}$ a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 6\,\mathrm{kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

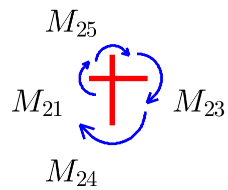
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$
$$w_5 = w_2 = w_4 = 0$$

Za základní neznámou tedy zvolíme φ_2.

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy



$$M_{21} + M_{23} + M_{24} + M_{25} = 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VV ($k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 1.35 \cdot 10^4\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= 0 - \frac{k_{12}\left(3\,\varphi_1 + 3\,\varphi_2 - \frac{6\,w_1^l - 6\,w_2^l}{L_{12}}\right)}{L_{12}} \\
&= 0 - 2.025 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{12} &= 0 + k_{12}\left(2\,\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{3\,w_1^l - 3\,w_2^l}{L_{12}}\right) \\
&= 0 + 1.35 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
Z_{21}^l &= 0 + \frac{k_{12}\left(3\,\varphi_1 + 3\,\varphi_2 - \frac{6\,w_1^l - 6\,w_2^l}{L_{12}}\right)}{L_{12}} \\
&= 0 + 2.025 \cdot 10^4\,\varphi_2 \\
M_{21} &= 0 + k_{12}\left(\varphi_1 + 2\,\varphi_2 - \frac{3\,w_1^l - 3\,w_2^l}{L_{12}}\right) \\
&= 0 + 2.7 \cdot 10^4\,\varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VK (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z^l_{23} &= -\frac{b_{23}\,F_{1z}\,\left(\frac{a_{23}\,(L_{23}+b_{23})}{2\,{L_{23}}^2}+1\right)}{L_{23}} - \frac{3\,k_{23}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2-2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\
&= -\frac{91}{27} - 4500\,\varphi_2 \\
M_{23} &= \frac{a_{23}\,b_{23}\,F_{1z}\,(L_{23}+b_{23})}{2\,{L_{23}}^2} + \frac{3\,k_{23}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2-2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4} \\
&= \frac{28}{9} + 1.35\cdot 10^4\,\varphi_2 \\
Z^l_{32} &= \frac{a_{23}\,F_{1z}\,\left(\frac{b_{23}\,(L_{23}+b_{23})}{2\,{L_{23}}^2}-1\right)}{L_{23}} + \frac{3\,k_{23}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_2-2\,w^l_3}{L_{23}}\right)}{4\,L_{23}} \\
&= -\frac{98}{27} + 4500\,\varphi_2 \\
M_{32} &= 0+0
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{aligned}
X_{23} &= X^l_{23} & u^l_2 &= u_2 \\
Z_{23} &= Z^l_{23} & w^l_2 &= w_2 \\
X_{32} &= X^l_{32} & u^l_3 &= u_3 \\
Z_{32} &= Z^l_{32} & w^l_3 &= w_3
\end{aligned}
$$

Prut 42-KV ($k_{42} = 2E_{42}I_{42}/L_{42} = 6750\,\mathrm{kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z^l_{42} &= -\frac{3\,L_{42}\,f_z}{8} - \frac{3\,k_{42}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_4-2\,w^l_2}{L_{42}}\right)}{4\,L_{42}} \\
&= -9 - 2531\,\varphi_2 \\
M_{42} &= 0+0 \\
Z^l_{24} &= -\frac{5\,L_{42}\,f_z}{8} + \frac{3\,k_{42}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_4-2\,w^l_2}{L_{42}}\right)}{4\,L_{42}} \\
&= -15 + 2531\,\varphi_2 \\
M_{24} &= -\frac{{L_{42}}^2\,f_z}{8} + \frac{3\,k_{42}\,\left(2\,\varphi_2 - \frac{2\,w^l_4-2\,w^l_2}{L_{42}}\right)}{4} \\
&= -12 + 1.013\cdot 10^4\,\varphi_2
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{aligned}
X_{42} &= Z^l_{42} & u^l_4 &= -w_4 \\
Z_{42} &= -X^l_{42} & w^l_4 &= u_4 \\
X_{24} &= Z^l_{24} & u^l_2 &= -w_2 \\
Z_{24} &= -X^l_{24} & w^l_2 &= u_2
\end{aligned}
$$

Prut 25-konz. (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
Z_{25}^{l} &= -F_{2z} + 0 \\
&= -4 + 0 \\
M_{25} &= a_{25}\, F_{2z} + 0 \\
&= 4 + 0 \\
Z_{52}^{l} &= 0 + 0 \\
M_{52} &= 0 + 0
\end{aligned}
$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$
\begin{array}{cc}
X_{25} = Z_{25}^{l} & u_2^{l} = -w_2 \\
Z_{25} = -X_{25}^{l} & w_2^{l} = u_2 \\
X_{52} = Z_{52}^{l} & u_5^{l} = -w_5 \\
Z_{52} = -X_{52}^{l} & w_5^{l} = u_5
\end{array}
$$

Po dosazení koncových sil do podmínky rovnováhy dostaneme rovnici:

$$5.063 \cdot 10^4\, \varphi_2 - 4.889 = 0$$

Vyřešením rovnice o jedné neznámé obdržíme hodnotu deformace

$$\varphi_2 = 9.657 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnících.

Prut 12:

$$
\begin{aligned}
X_{12}^{l} &= -18.756\,\mathrm{kN} \\
Z_{12}^{l} &= -1.956\,\mathrm{kN} \\
M_{12} &= 1.304\,\mathrm{kNm} \\
X_{21}^{l} &= 18.756\,\mathrm{kN} \\
Z_{21}^{l} &= 1.956\,\mathrm{kN} \\
M_{21} &= 2.607\,\mathrm{kNm}
\end{aligned}
$$

Prut 23:

$$
\begin{aligned}
X_{23}^{l} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z_{23}^{l} &= -3.805\,\mathrm{kN} \\
M_{23} &= 4.415\,\mathrm{kNm} \\
X_{32}^{l} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z_{32}^{l} &= -3.195\,\mathrm{kN} \\
M_{32} &= 0.000\,\mathrm{kNm}
\end{aligned}
$$

Prut 42:

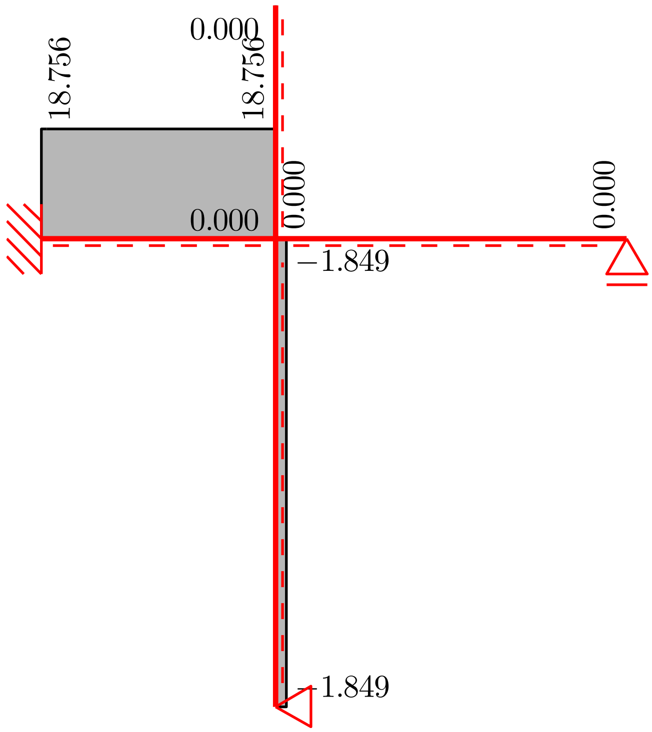
$$
\begin{aligned}
X_{42}^{l} &= 1.849\,\mathrm{kN} \\
Z_{42}^{l} &= -9.244\,\mathrm{kN} \\
M_{42} &= 0.000\,\mathrm{kNm} \\
X_{24}^{l} &= -1.849\,\mathrm{kN} \\
Z_{24}^{l} &= -14.756\,\mathrm{kN} \\
M_{24} &= -11.022\,\mathrm{kNm}
\end{aligned}
$$

Prut 25:

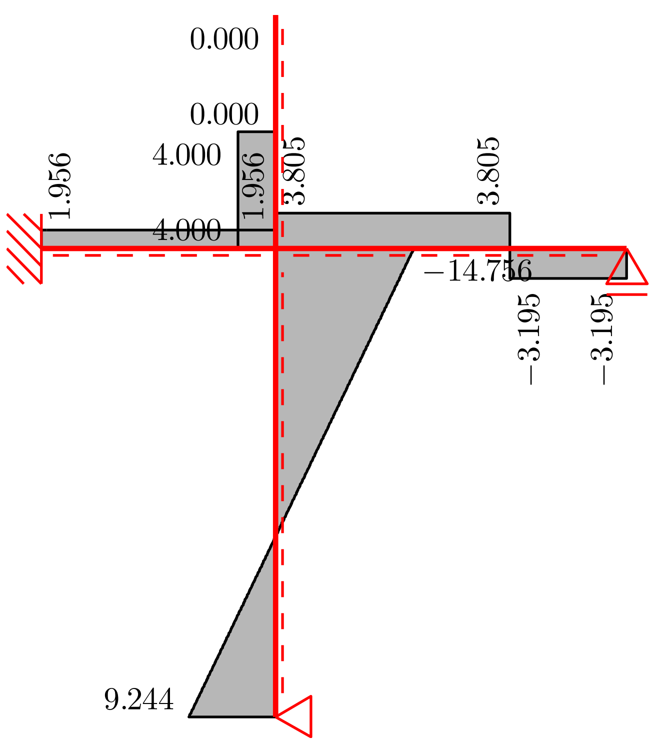
$$
\begin{aligned}
X_{25}^{l} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z_{25}^{l} &= -4.000\,\mathrm{kN} \\
M_{25} &= 4.000\,\mathrm{kNm} \\
X_{52}^{l} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
Z_{52}^{l} &= 0.000\,\mathrm{kN} \\
M_{52} &= 0.000\,\mathrm{kNm}
\end{aligned}
$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]