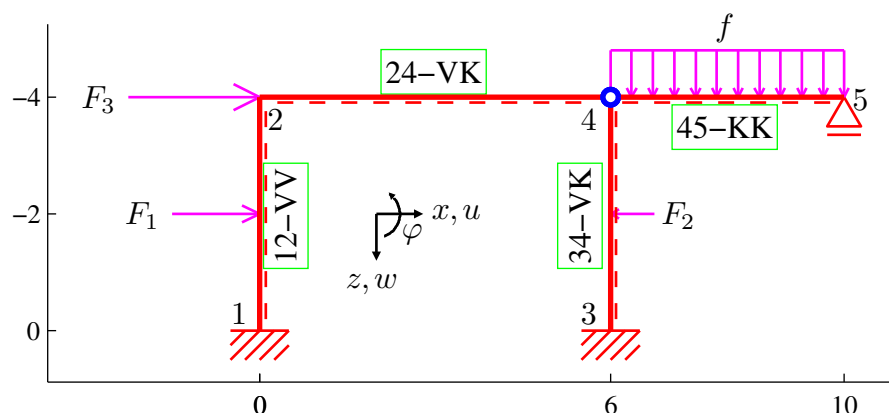


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil ( $M, V, N$ ) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je  $E = 20 \text{ GPa}$ . Konstrukce je zatížena silou  $F_1 = 10 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 5 \text{ kN}$ ,  $F_3 = 15 \text{ kN}$  a rovnoměrným spojitým zatížením  $f = 4 \text{ kN/m}$ . (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_2 = u_4 = u_5$$


$$w_2 = w_1 = 0$$

$$w_4 = w_3 = 0$$

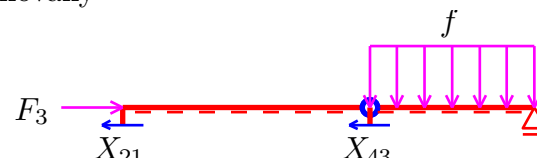
Za základní neznámé tedy zvolíme  $\varphi_2, u_2$ .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{21} + M_{24} = 0$$


- Patrová podmínka rovnováhy

$$X_{21} + X_{43} = 0 + 15$$


Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VV ( $k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 4500 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= \frac{b_{12} F_{1z} \left( \frac{a_{12}(a_{12}-b_{12})}{L_{12}^2} - 1 \right)}{L_{12}} - \frac{k_{12} \left( 3\varphi_1 + 3\varphi_2 - \frac{6w_1^l - 6w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
&= -5 - 3375\varphi_2 - 1688w_2^l \\
M_{12} &= \frac{a_{12} b_{12}^2 F_{1z}}{L_{12}^2} + k_{12} \left( 2\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{3w_1^l - 3w_2^l}{L_{12}} \right) \\
&= 5 + 4500\varphi_2 + 3375w_2^l \\
Z_{21}^l &= -\frac{a_{12} F_{1z} \left( \frac{b_{12}(a_{12}-b_{12})}{L_{12}^2} + 1 \right)}{L_{12}} + \frac{k_{12} \left( 3\varphi_1 + 3\varphi_2 - \frac{6w_1^l - 6w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
&= -5 + 3375\varphi_2 + 1688w_2^l \\
M_{21} &= -\frac{a_{12}^2 b_{12} F_{1z}}{L_{12}^2} + k_{12} \left( \varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{3w_1^l - 3w_2^l}{L_{12}} \right) \\
&= -5 + 9000\varphi_2 + 3375w_2^l
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= Z_{12}^l & u_1^l &= -w_1 \\
Z_{12} &= -X_{12}^l & w_1^l &= u_1 \\
X_{21} &= Z_{21}^l & u_2^l &= -w_2 \\
Z_{21} &= -X_{21}^l & w_2^l &= u_2
\end{aligned}$$

Prut 34-VK ( $k_{34} = 2E_{34}I_{34}/L_{34} = 4500 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{34}^l &= -\frac{b_{34} F_{2z} \left( \frac{a_{34}(L_{34}+b_{34})}{2L_{34}^2} + 1 \right)}{L_{34}} - \frac{3k_{34} \left( 2\varphi_3 - \frac{2w_3^l - 2w_4^l}{L_{34}} \right)}{4L_{34}} \\
&= \frac{55}{16} - 421.9w_4^l \\
M_{34} &= \frac{a_{34} b_{34} F_{2z} (L_{34} + b_{34})}{2L_{34}^2} + \frac{3k_{34} \left( 2\varphi_3 - \frac{2w_3^l - 2w_4^l}{L_{34}} \right)}{4} \\
&= -\frac{15}{4} + 1688w_4^l \\
Z_{43}^l &= \frac{a_{34} F_{2z} \left( \frac{b_{34}(L_{34}+b_{34})}{2L_{34}^2} - 1 \right)}{L_{34}} + \frac{3k_{34} \left( 2\varphi_3 - \frac{2w_3^l - 2w_4^l}{L_{34}} \right)}{4L_{34}} \\
&= \frac{25}{16} + 421.9w_4^l \\
M_{43} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{34} &= Z_{34}^l & u_3^l &= -w_3 \\ Z_{34} &= -X_{34}^l & w_3^l &= u_3 \\ X_{43} &= Z_{43}^l & u_4^l &= -w_4 \\ Z_{43} &= -X_{43}^l & w_4^l &= u_4 \end{aligned}$$

Prut 24-VK ( $k_{24} = 2E_{24}I_{24}/L_{24} = 3000 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{24}^l &= 0 - \frac{3 k_{24} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4 L_{24}} \\ &= 0 - 750 \varphi_2 \\ M_{24} &= 0 + \frac{3 k_{24} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4} \\ &= 0 + 4500 \varphi_2 \\ Z_{42}^l &= 0 + \frac{3 k_{24} \left( 2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_4^l}{L_{24}} \right)}{4 L_{24}} \\ &= 0 + 750 \varphi_2 \\ M_{42} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{24} &= X_{24}^l & u_2^l &= u_2 \\ Z_{24} &= Z_{24}^l & w_2^l &= w_2 \\ X_{42} &= X_{42}^l & u_4^l &= u_4 \\ Z_{42} &= Z_{42}^l & w_4^l &= w_4 \end{aligned}$$

Prut 45-KK (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{45}^l &= -\frac{L_{45} f_z}{2} + 0 \\ &= -8 + 0 \\ M_{45} &= 0 + 0 \\ Z_{54}^l &= -\frac{L_{45} f_z}{2} + 0 \\ &= -8 + 0 \\ M_{54} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{45} &= X_{45}^l & u_4^l &= u_4 \\ Z_{45} &= Z_{45}^l & w_4^l &= w_4 \\ X_{54} &= X_{54}^l & u_5^l &= u_5 \\ Z_{54} &= Z_{54}^l & w_5^l &= w_5 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1.35 \cdot 10^4 \varphi_2 + 3375 u_2 - 5 &= 0 \\ 3375 \varphi_2 + 2109 u_2 - 18.44 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -0.003025 \text{ rad} \\ u_2 &= 0.01358 \text{ m} \end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= -2.269 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -17.708 \text{ kN} \\ M_{12} &= 37.222 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 2.269 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= 7.708 \text{ kN} \\ M_{21} &= 13.611 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 34:

$$\begin{aligned} X_{34}^l &= 10.269 \text{ kN} \\ Z_{34}^l &= -2.292 \text{ kN} \\ M_{34} &= 19.167 \text{ kNm} \\ X_{43}^l &= -10.269 \text{ kN} \\ Z_{43}^l &= 7.292 \text{ kN} \\ M_{43} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 24:

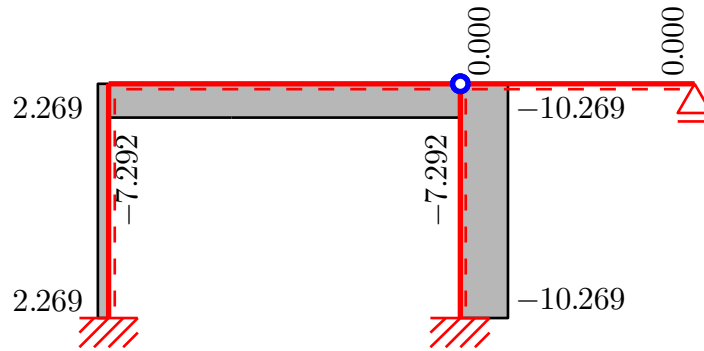
$$\begin{aligned} X_{24}^l &= 7.292 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= 2.269 \text{ kN} \\ M_{24} &= -13.611 \text{ kNm} \\ X_{42}^l &= -7.292 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= -2.269 \text{ kN} \\ M_{42} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

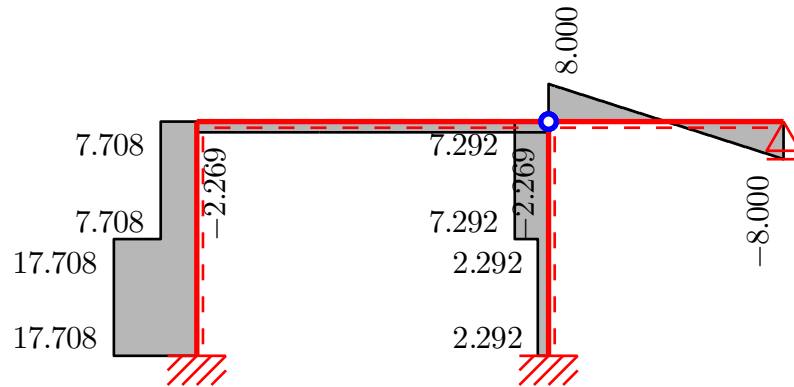
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= -8.000 \text{ kN} \\ M_{45} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= -8.000 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly  $N$  [kN]



- Posouvající síly  $V$  [kN]



- Ohybové momenty  $M$  [kNm]

